分类号：O534　　单位代码：10335

密　级：非涉密　　学　　号：11736024

浙江大学

博士学位论文

中文论文题目：托卡马克中高能量粒子物理的非线性数值模拟研究

英文论文题目：**Nonlinear simulation study of energetic particle physics in Tokamaks**

申请人姓名：张豪伟

指导教师：马志为　教授

专业名称：等离子体物理

研究方向：磁约束聚变

所在学院：物理学院

论文提交日期：2022 年 4 月 10 日

托卡马克中高能量粒子物理的非线性数值模拟研究

论文作者签名：张豪伟

指导教师签名：

论文评阅人 1：

评阅人 2：

评阅人 3：

评阅人 4：

评阅人 5：

答辩委员会主席：陈伟

委员 1：

委员 2：傅国勇

委员 3：

委员 4：

委员 5：

答辩日期：2022 年 5 月 20 日

Nonlinear simulation study of energetic particle physics in Tokamaks

Author's signature: 张豪伟

Supervisor's signature:

External Reviewers:

Examining Committe Chairperson:

陈伟

Examining Committe Members:

Date of oral defence: May 20, 2022

浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得浙江大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：张豪伟　　签字日期：2022 年 5 月 21 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解浙江大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权浙江大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：张豪伟　　导师签名：

签字日期：2022 年 5 月 21 日　　签字日期：2022 年 5 月 21 日

学位论文作者毕业后去向：

工作单位：　　电话：

通讯地址：　　邮编：

知识产权保护声明

本人郑重声明：我所提交答辩的学位论文，是本人在导师指导下完成的成果，该成果属于 **浙江大学** 理学部物理学院，受国家知识产权法保护。在学期间与毕业后以任何形式公开发表论文或申请专利，均需由导师作为通讯联系人，未经导师的书面许可，本人不得以任何方式，以任何其它单位作全部和局部署名公布学位论文成果。本人完全意识到本声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：张豪伟

签字日期：2022 年 5 月 21 日

摘 要

下一代堆级别的托卡马克中 (如 ITER)，将实现氘氚聚变自持的燃烧等离子体。燃烧等离子体中聚变产生的 3.5MeV α 粒子等高能量粒子加热背景等离子体，从而维持聚变过程。高能量粒子可以共振激发不同的剪切阿尔芬波不稳定性，并显著影响磁流体不稳定性的演化。因此，研究高能量粒子与剪切阿尔芬波和磁流体不稳定性的相互作用，对理解燃烧等离子体中的高能量粒子物理具有重要意义。

本论文工作中，我们将磁流体-动理学混合模拟程序 CLT-K 在电流耦合模型基础上拓展，引入压强耦合模型，并严格校验两种耦合模型在不同条件下的一致性。在此基础上，我们使用 CLT-K 程序系统地研究了托卡马克中高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模 (m 和 n 分别为极向和环向模数) 线性稳定性的影响，发现撕裂模的线性稳定性与高能量粒子的速度空间分布紧密相关，可以概括为：同向通行和捕获高能量粒子对撕裂模起稳定作用，而反向通行高能量粒子则起去稳作用。同向通行、反向通行和捕获高能量粒子均可激发 $m/n = 2/1$ 高能量粒子模 (EPM)，且有完全不同的波-粒子共振关系，EPM 的频率取决于高能量粒子的特征轨道频率。

此外，我们模拟研究了托卡马克中高能量粒子作用下，$m/n = 2/1$ 撕裂模和 $n = 1$ 环阿尔芬本征模 (TAE) 的非线性相互作用过程。该过程中，$n = 0$ 的带状流分量有两个阶段的非线性增长：首先，在 TAE 线性阶段，带状流以 TAE 两倍的增长率指数增长，并影响 TAE 的饱和幅值；其次，在撕裂模饱和阶段，带状流出现第二阶段的非线性增长，并成为主导模式。该主导性带状流幅值强且径向分布广，并对 TAE 的模结构和饱和幅值产生调制。相空间分析发现，撕裂模对高能量粒子有明显的再分布作用，再分布后的高能量粒子提供稳定的驱动源，并非线性激发第二阶段的主导性带状流。此外，撕裂模同样可以产生局域分布的带状流分量，后者对撕裂模的非线性饱和起决定性作用。另一方面，撕裂模对高能量粒子分布函数的改变，导致原先不稳定 TAE 的爆发和临界稳定 TAE 的去稳。

综上，我们对包含高能量粒子、剪切阿尔芬波、磁流体不稳定性和带状流的托卡马克非线性等离子体系统做了系统模拟研究，有助于理解托卡马克中的波-粒子和波-波非线性物理。此外，我们对磁流体程序 CLT 和混合程序 CLT-K 进行了较大规模的开发和完善，为今后研究更复杂的托卡马克燃烧等离子体物理打下良好基础。

关键词：托卡马克，高能量粒子，剪切阿尔芬波不稳定性，撕裂模，带状流

Abstract

In future reactor scale Tokamaks, e.g., ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), the desired outcome is to produce a confined plasma achieving a self-sustaining state of Deuterium-Tritium (D-T) fusion, a so-called burning plasma. In this burning state, the Energetic Particles (EPs), mainly composed of 3.5MeV α particles through the D-T fusion process, play the dominant role in heating the background plasma and sustaining the continuous burning plasma system. During this burning process, Shear Alfvén Wave (SAW) instabilities are easily destabilized by EPs via wave-particle resonance. Also, EPs greatly influence evolutions of MagnetoHydro-Dynamic (MHD) instabilities. Therefore, studying interactions between EPs and both SAW and MHD instabilities is important for understanding EP physics in fusion plasmas.

The work presented in this doctoral thesis reports on key numerical results based on simulations produced with the MHD-kinetic hybrid code, CLT-K. Firstly, equivalences of two different coupling schemes, the original current coupling scheme and the newly adopted pressure coupling scheme, are strictly verified under different approximations. Secondly, the influences of EPs on the linear stability of the $m/n = 2/1$ tearing mode (where m and n represent the poloidal and toroidal mode numbers, respectively) are discussed systematically. Results show that both co-passing and trapped EPs have a stabilization effect on the tearing mode, while counter-passing EPs exhibit a destabilization effect. EPs with varying distribution functions can excite an $m/n = 2/1$ Energetic Particle Mode (EPM). In phase space, the resonance conditions of EPM with co-passing, counter-passing, and trapped EPs are different. The frequency of EPM is determined by characteristic orbit frequencies of EPs.

In addition, the nonlinear interactions of the $m/n = 2/1$ tearing mode and $n = 1$ Toroidal Alfvén Eigenmode (TAE) in the presence of EPs are also investigated. During this process, the $n = 0$ zonal flow component exhibits two nonlinear growth stages. Firstly, the zonal flow grows exponentially over time, with the growth rate twice that of the TAE, and the saturation level of TAE is greatly influenced by the zonal flow. Secondly, during the saturation stage of the tearing mode, the zonal flow shows a secondary nonlinear growth and eventually becomes the dominant mode in the system. This dominant zonal flow has a high saturation level and a wide radial distribution. The mode structure and the final saturation level of TAE are modulated by the zonal

flow. Through phase space analysis, it is found that the redistribution of EPs by tearing mode results in a continuous drive of the background plasma and ultimately produces the dominant zonal flow nonlinearly. Furthermore, it is noted that the tearing mode can also nonlinearly generate a localized zonal flow component, which is a prerequisite for the nonlinear saturation of the tearing mode. Finally, the tearing mode is found to modulate the EP distribution, leading to an enhanced eruption of the originally unstable TAE and destabilization of the marginally stable TAE.

In summary, a set of comprehensive numerical simulations for a nonlinear Tokamak plasma system is carried out, including EPs, SAW instabilities, MHD instabilities, and zonal flow. This work may improve understanding of the physical mechanisms behind wave-particle and wave-wave nonlinear interactions in Tokamaks. In addition, the varying physical schemes and the numerical algorithms of the MHD code, CLT, and the hybrid code, CLT-K, have been significantly upgraded and improved, and should remain very useful tools for simulating more complex burning plasma physics of Tokamaks in future research.

Keywords: Tokamak, energetic particle, shear Alfvén wave instabilities, tearing mode, zonal flow

缩　写

AE: Alfvén Eigenmode, 阿尔芬本征模；
BAE: Beta-incuded Alfvén Eigenmode, 压缩阿尔芬本征模；
CAW: Compressional Alfvén Wave, 压缩阿尔芬波；
CFD: Computational Fluid Dynamics, 计算流体力学；
CGL: Chew-Goldberger-Low；
CLT: Ci-Liu-Ti, 磁流体程序 CLT；
CLT-K: Ci-Liu-Ti-Kinetic/Kuai, 磁流体-动理学 (快粒子) 混合模拟程序 CLT-K；
EAE: Ellipticity-induced Alfvén Eigenmode, 椭圆形变阿尔芬本征模；
EAST: Experimental Advanced Superconducting Tokamak, 全超导托卡马克核聚变实验装置；
ECRH, ICRH: Electron (Ion) Cyclotron Resonance Heating, 电子 (离子) 回旋共振加热；
EGAM: Energetic particle-induced Geodesic Acoustic Mode, 高能量粒子测地声模；
EP: Energetic Particle, 高能量粒子；
EPM: Energetic Particle Mode, 高能量粒子模；
GAE: Global Alfvén Eigenmode, 全域阿尔芬本征模；
GAM: Geodesic Acoustic Mode, 测地声模；
HAE: Helicity-induced Alfvén Eigenmode, 螺旋阿尔芬本征模；
HL-2A/M: HuanLiu-2A/M, 中国环流器 2 号 A/M 装置；
ICF: Inertial Confinement Fusion, 惯性约束聚变；
ITER: International Thermonuclear Experimental Reactor, 国际热核聚变实验反应堆；
ITG: Ion Temperature Gradient mode, 离子温度梯度模；
J-TEXT: Joint Texas Experimental Tokamak, 联合德克萨斯实验托卡马克；
MCF: Magnetic Confinement Fusion, 磁约束聚变；
MHD: MagnetoHydroDynamics, 磁流体力学；
MIAE: Magnetic-Island-induced Alfvén Eigenmode, 磁岛阿尔芬本征模；
MPI: Message Passing Interface, 消息传递接口；
NAE: Noncircularity-induced Alfvén Eigenmode, 非圆形变阿尔芬本征模；
NBI: Neutral Beam Injection, 中性束注入；
PIC: Particle In Cell, 粒子云模拟；

RMP: Resonant Magnetic Perturbation, 共振磁扰动；

RSAE: Reversed Shear Alfvén Eigenmode, 反剪切阿尔芬本征模；

SAW: Shear Alfvén Wave, 剪切阿尔芬波；

SOL: Scrape-Off Layer, 刮削层；

SUNIST: Sino-UNIted Spherical Tokamak, 中国联合球形托卡马克；

TAE: Toroidal Alfvén Eigenmode, 环阿尔芬本征模；

TM: Tearing Mode, 撕裂模；

图目录

表目录

目 次

1 绪论

1.1 能源问题

能源问题一直是影响人类未来发展的关键性因素，新兴能源的开发利用和能源结构的转型升级则是社会发展和文明进步的必然过程与永恒使命。目前，全球范围内消耗的绝大多数能源都属于不可再生的化石燃料，例如煤炭、石油和天然气等。这类消耗性资源往往需要数百万年甚至更长时间的地质演化才能形成，且人类对其消耗的速率远远大于自然界的产生速率。根据当前化石燃料的探明储量和消耗速率，可以估计，煤炭、石油和天然气等众多化石燃料都将在数百年甚至数十年内被消耗殆尽[1]。此外，对这类化石能源的过度使用会造成大量的碳排放，进而产生一系列全球性气候环境问题。而现有的新型清洁能源，如太阳能、地热能、风能、生物质能和水力能等，由于应用技术、开发成本和气候条件等因素的限制，目前在绝大多数国家仍只能作为补充能源被加以利用。因此，上世纪发现的原子核反应过程中由于质量损失而释放的能量 ($E = mc^2$)，即核能，作为最有应用前景的能源，一直备受全球主要国家的重视。

人类间接获得和利用核能的最简单途径便是使用太阳内部核聚变反应所产生的能量，即太阳能。而在地球上，人类通过对核反应的人为控制，主要有两种途径来实现更高效的核能利用：第一种是可控核裂变反应，目前主要通过铀 235 (Uranium, $^{235}_{92}$U) 的裂变反应来提供能量；第二种为可控核聚变反应，主要通过氘 (Deuterium, $^{2}_{1}$D) 和氚 (Tritium, $^{3}_{1}$T) 等轻原子核融合来释放能量。其中，以可控核裂变反应原理建造的核反应堆发电站目前已在多个国家得到推广和普及。但是，地球上探明的铀资源不是非常丰富，而且裂变堆的链式反应特性对核电站的安全运行有极大的威胁。历史上几次严重的核电厂泄漏事故给人类和平利用裂变能敲响了警钟，例如前苏联切尔诺贝利事故和日本福岛事故等。除此之外，放射性核废料、核扩散以及国际政治博弈等因素极大程度地限制了裂变能的大规模推广。相比之下，可控核聚变，由于其反应过程需要维持极高的温度和压力，反应条件相当苛刻，任何反应条件的缺失都会使核聚变过程终止，因此不会出现类似裂变堆的“失控”链式反应。此外，聚变反应产生的核废料主要为低半衰期和弱放射性的氢同位素，可控聚变能源对环境造成的核污染原则上会远小于裂变堆。而海水中丰富的氘和锂 6 (Lithium, $^{6}_{3}$Li) 资源理论上可以为人类提供数百万年的聚变能源[1]。因此，对可控核聚变方案的探索一直是全世界近半个多世纪来的主要研究热点之一，并促进了物理学、工程学和计算机科学等多个学科领域的共同发展。

1.2 可控核聚变研究进展

核聚变过程中，两个较轻的原子核通过碰撞结合产生一个更重的原子核，并在这个过程中损失一部分质量，以能量的形式释放出来。目前，研究最多且最有希望实现的可控核聚变反应主要是通过氘氚原子核反应生成 3.52MeV 的氦核 (Helium, ${}^4_2$He, 也称为 α 粒子) 和 14.06MeV 的中子 (neutron, ${}^1_0$n)，其反应方程式如下：

$$ {}^2_1\mathrm{D} + {}^3_1\mathrm{T} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He}\,(3.52\mathrm{MeV}) + {}^1_0\mathrm{n}\,(14.06\mathrm{MeV}). \tag{1.1} $$

上述反应方程的氘元素 (${}^2_1$D) 在海水中稳定存在，且储量相当丰富，由于其质量 (相比于氢元素) 较大，易于提取。但氚元素 (${}^3_1$T) 是氢的放射性同位素，其半衰期只有 12.32 年，在自然界中储量十分有限，且氚的制造和存储成本都相当昂贵。因此，为了实现可持续的氘氚核反应过程，聚变堆还需要通过下列中子和锂元素的核反应来生成氚：

$$ {}^1_0\mathrm{n} + {}^6_3\mathrm{Li} \rightarrow {}^3_1\mathrm{T} + {}^4_2\mathrm{He}, \tag{1.2} $$

$$ {}^1_0\mathrm{n} + {}^7_3\mathrm{Li} \rightarrow {}^3_1\mathrm{T} + {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n}. \tag{1.3} $$

由于锂 6 元素有更大的反应截面来生成氚，因此绝大多数装置都选择反应式1.2的方案来实现氚增殖和自持。除此之外，还有其他形式的聚变反应过程，如：

$$ {}^2_1\mathrm{D} + {}^2_1\mathrm{D} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} + 3.27\mathrm{MeV}, \tag{1.4} $$

$$ {}^2_1\mathrm{D} + {}^2_1\mathrm{D} \rightarrow {}^3_1\mathrm{T} + {}^1_1\mathrm{H} + 4.03\mathrm{MeV}, \tag{1.5} $$

$$ {}^2_1\mathrm{D} + {}^3_2\mathrm{He} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_1\mathrm{H} + 18.3\mathrm{MeV}. \tag{1.6} $$

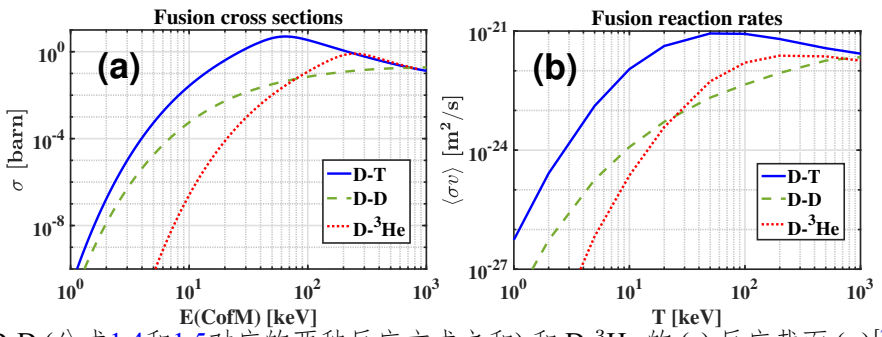

图 1.1 D-T、D-D (公式1.4和1.5对应的两种反应方式之和) 和 D-^{3}He 的 (a) 反应截面 (σ)[2] 和 (b) 麦克斯韦分布下的反应速率系数 (reaction rate, $\langle\sigma v\rangle$)[3]。

对于上述不同形式的聚变反应方式，图1.1给出了对应的反应截面 (σ)[2] 和反应速率系数 (reaction rate, $\langle\sigma v\rangle$)[3] 与温度的依赖关系。可以看到在 D-T、D-D 和 D-^{3}He 三种聚变反应方式中，D-T 聚变的反应温度要求最低，因此更容易实现，这也是目前人类探索聚变能源的主要研究目标。

国际上主流的可控核聚变研究方向包括惯性约束聚变 (Inertial Confinement Fusion, ICF) 和磁约束聚变 (Magnetic Confinement Fusion, MCF) 两种。其中惯性约束聚变[4] 主要通过多道激光 (也有使用电子或离子束等) 同时对称轰击装有核反应原料的靶丸，使其外层发生爆炸，进而产生向内的冲击波，迅速压缩并加热中心燃料，最后实现核聚变反应。国际上最著名的惯性聚变研究装置为美国劳伦斯利弗莫尔国家实验室 (Lawrence Livermore National Laboratory, LLNL) 的国家点火装置 (National Ignition Facility, NIF)，包含 192 束激光系统[5]。在 NIF 最近的工作中，研究团队使用该装置首次实现了实验室内氘氚核燃料的燃烧等离子体态 (burning-plasma state)[5]。在中国，代表性的惯性约束聚变装置则是神光系列的激光装置，其中最新一代神光 IV 将包含 288 路高功率激光系统[6]。尽管惯性约束聚变的研究已经里程碑式地获得了燃烧等离子体，但距离真正高效的聚变能源利用仍有众多瓶颈和难点需要解决。

不同于惯性约束聚变，磁约束聚变[7] 主要通过特殊设计的磁场来束缚等离子体态的核燃料，并辅助以一定的加热措施，将等离子体加热到一亿度 (10keV) 以上，从而实现氘氚核聚变反应过程。主流的磁约束聚变装置包括磁镜 (magnetic mirror)[8]、θ/Z 箍缩 (pinch)[9,10]、场反位型装置 (Field Reversed Configuration, FRC)[11]、反场箍缩装置 (Reversed Field Pinch, RFP)[12]、球马克 (Spheromak)[13]、托卡马克 (Tokamak)[14] 和仿星器 (Stellarator)[15] 等。由于磁镜等非闭合装置的开放磁力线会造成损失锥 (loss cone) 内的粒子沿着磁力线单向运动造成端口处大量粒子损失，而基本被放弃。人们自然而然地选择具有磁力线环向闭合特性的封闭磁场位型来束缚等离子体。但是对于直接闭合的轴对称环向磁力线，其磁场梯度会导致电子和离子在竖直方向 (垂直于磁场梯度方向) 向相反方向漂移，进而产生竖直方向的电荷分离和电场，而电场导致的 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 漂移又会进一步导致粒子在水平方向漂移，最终使得等离子体约束失败。因此需要通过设计螺旋变化的磁场位型来抵消带电粒子的漂移运动，实现对等离子体的约束。为此，上世纪五十年代，前苏联和美国科学家分别提出了上述的托卡马克和仿星器这两种螺旋磁场位型的环形磁约束装置。

如图1.2 (a) 所示，托卡马克中，环向场线圈环绕整个真空室，产生沿大环方向的环向磁场。中心欧姆变压器通过电流变化感应出环向电场，该电场驱动离子和电子沿相反方向运动，产生环向等离子体电流。该等离子体电流进而贡献主要的极向磁场分量。环向磁场和极向磁场共同叠加形成螺旋位型的闭合磁力线，在真空室内盘绕成不同的嵌套磁面，从而实现对等离子体的约束。因此，托卡马克螺旋磁场需要通过外加线圈以及等离子体电流来共同提供。而仿星器装置的三维螺旋磁场全部或者绝大部分由外加三维线圈或三维磁体来直接提供，几乎不需要等离子体电流来提供极向磁场，如图1.2 (b) 所示。由于等离子体电流份额低，仿星器装置运行时不稳定性相对较少，理论上可以实现稳态运行。尽管如此，由于三维线圈的加工精度要求极高、三维磁面造成偏滤器结构复杂、粒子约束性能差和聚变温度下的新经典输运过高等问题，使得现阶段仿星器的研究进展仍远落后于托卡马克。

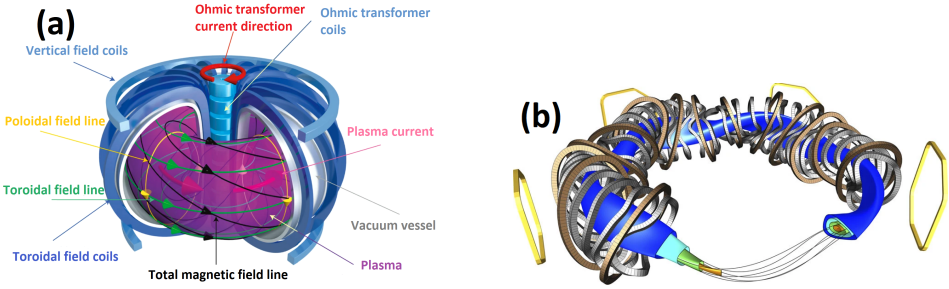

图 1.2　(a) 托卡马克示意图[7]；(b) Wendelstein 7-X (W7-X) 仿星器示意图[16]。

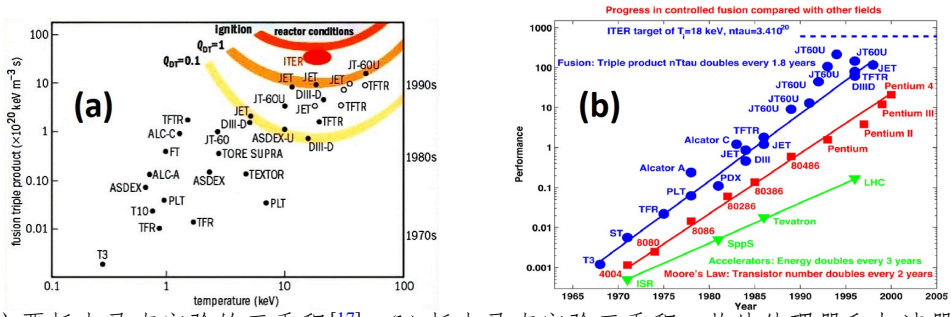

图 1.3　(a) 主要托卡马克实验的三乘积[17]；(b) 托卡马克实验三乘积、芯片处理器和加速器性能的发展对比示意图[18]。

对于实现聚变的参数，英国科学家劳森 (John D. Lawson) 于 1955 年提出著名的点火条件，即劳森判据 (Lawson criterion)[19]。通过估算，实现 D-T 点火的必要条件为等离子体密度 n、能量约束时间 τ_ε 和温度 T 的三乘积大于 $3\times10^{21}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{keVs}$，即：

$$n\tau_\varepsilon T > 3\times10^{21}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{keVs}. \tag{1.7}$$

到目前为止，研究人员已经在不同托卡马克上尝试了多次氘氚聚变实验，例如欧洲的 JET (Joint European Torus) 托卡马克[20–22] 和美国的 TFTR (Tokamak Fusion Test Reactor) 托卡马克[23]。尽管目前所有托卡马克实验都未能达到公式1.7所对应的点火三乘积条件，但近半个世纪来的托卡马克实验已经取得了相当可观的进步。如图1.3所示，从上世纪 60 年代开始，托卡马克实验中的三乘积已经取得了四五个量级的提高，且现已十分逼近 $3\times10^{21}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{keVs}$。更重要的是，托卡马克性能的发展速度甚至超过了摩尔定律 (Moore's law) 所预言的芯片处理器内晶体管数量的增长速度。JET 和 JT-60U 托卡马克实验得到的 (等效) 聚变能量增益因子 (fusion energy gain factor, 即 Q，定义为聚变反应产生的输出功率与外界输入装置的功率之比) 已接近甚至超过 $\mathrm{Q}=1$[20,21,24]，相当于基本实现能量的收支平衡。但目前已进行的聚变实验到实现稳定的自持氘氚聚变反应仍有较大距离，为了实现等离子体的自持燃烧，要求来自 α 粒子沉积的加热功率超过外加的辅助加热功率，也就是 $\mathrm{Q}_\alpha \gtrsim 1$ (Q_α 为聚变 α 粒子的功率与外界输入功率之比)，对应的 Q 值则需要大于 5 (α 粒子能量占氘氚聚变输出能量的五分之一)[5]。

基于现有托卡马克上所取得的巨大科学研究进展，为促进磁约束聚变能的发展，推动

核能的和平利用，中国、欧盟、印度、日本、俄罗斯、韩国和美国作为世界主要经济体共同参与了“国际热核聚变实验反应堆”计划 (International Thermonuclear Experimental Reactor, ITER)。ITER 计划将实现以下几个科学和工程目标[25]：i. 实现足够的聚变反应，在短时间内达到 Q = 10 ($Q_\alpha = 2$) 的聚变能量增益；ii. 演示和测试运行核聚变电站的基本技术，包括低温、加热、控制、诊断和维护等；iii. 实现并研究燃烧等离子体；iv. 研究氚增殖和自持；v. 证明聚变电站的可靠性和安全性。ITER 装置建成之后，将成为世界上最大的托卡马克，其等离子体大半径约为 6.2m，等离子体体积约为 840m^3，预计达到 1.5 亿度等离子体温度，实现 500MW 的功率输出。

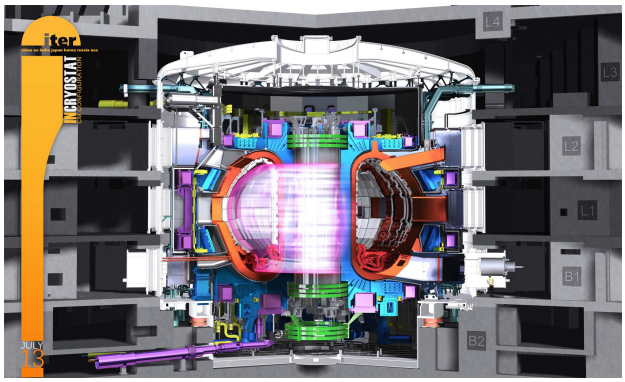

图 1.4 ITER 托卡马克示意图[25]。

1.3 托卡马克与等离子体

在上一节中，我们初步讨论了托卡马克实验研究取得的进展，本节我们简要介绍托卡马克和等离子体的基本性质。托卡马克的概念最初由前苏联科学家 (以 Igor Tamm 和 Andrei Sakharov 为代表) 于上世纪五十年代提出，其名字来源于俄语单词 токамак，为环形 (Toroidal)、真空室 (Kamera)、磁 (Magnit) 和线圈 (Kotushka) 四个单词的缩写。托卡马克的磁场位型如图1.5所示，其中 r, θ 和 φ 分别表示径向小环半径、极向角和环向角，R_0 和 a 分别表示装置的大环半径和小环半径，装置的反环径比定义为 $\epsilon \equiv a/R_0$。托卡马克的磁场主要由环向和极向分量组成，其中环向磁场主要由外部环向场线圈产生，极向磁场主要由等离子体电流产生。环向和极向磁场分量叠加形成的螺旋磁场构成一层层闭合嵌套磁面，同一层磁面上的所有磁力线螺旋程度相同，该螺旋磁场产生的旋转变换 (rotational transform) 可以抵消由磁漂移导致的电荷分离，从而降低粒子的损失，提高约束性能。磁力线的螺旋程度对于托卡马克运行时等离子体的稳定性有着至关重要的影响，一般情况下，托卡马克中等离子体的稳定性和安全性随着磁力线螺旋程度的增加而上升，因此通常定义一个安全因子 q 来表示磁力线的螺旋程度[26]，即：

$$
\begin{aligned}
q &\equiv \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{R} \frac{B_\varphi}{B_\theta} dl \\
&\approx \frac{r B_\varphi}{R_0 B_\theta}.
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

上述公式的近似条件适用于圆截面的大环径比 ($\epsilon \ll 1$) 托卡马克，其中 $\oint dl$ 表示沿着磁面极向一圈的积分，B_φ 和 B_θ 分别表示环向和极向磁场，R 表示磁面不同位置的大环半径。对于 q 为任意整数或者分数 (有理数) 的磁面，称为有理面 (rational surface)，其安全因子满足 $q = m/n$，m 和 n 为整数，表示磁力线沿环向转 m 圈后，在极向恰好转了 n 圈，从而回到出发点。对于 q 不等于任何整数或者分数 (无理数) 的磁面，称为无理面 (irrational surface)，即磁力线沿着螺旋方向旋转永远不会闭合。磁约束等离子体中，通常还将等离子体热压 (p) 和磁压 ($B^2/2\mu_0$) 的比值定义为无量纲的比压 β，即：

$$\beta \equiv \frac{p}{B^2/2\mu_0}. \tag{1.9}$$

一般 β 越高，表示等离子体的约束性能越好，大多数托卡马克等离子体的 β 为 1% 量级。此外，实验上也经常使用归一化后的比压 β_N，也称作 Troyon 因子[27]，即 $\beta_N = \beta B_\varphi a/I_p$，其中 I_p 表示等离子子体电流 (MA)。

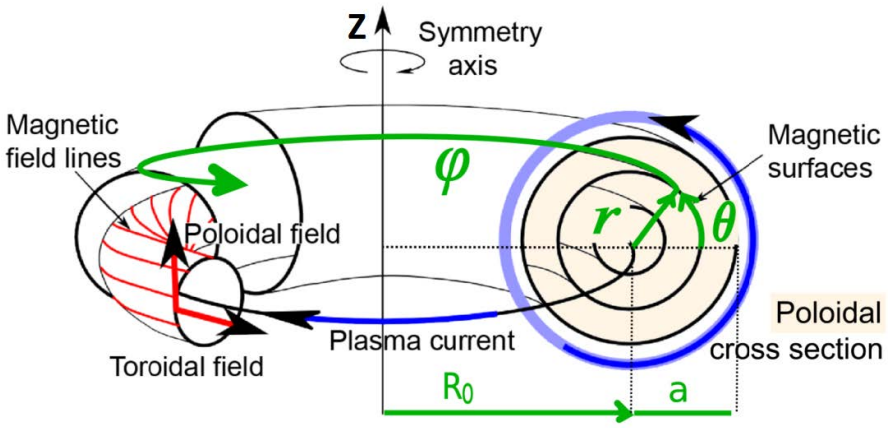

图 1.5　托卡马克的磁场位型示意图[28]。

除了上一节介绍的 ITER 托卡马克工程，世界各国已经建造了多个不同尺寸和特点的托卡马克，具体参数信息如表1.1所列 (包括部分球形托卡马克)。国内目前正在运行的托卡马克主要有：中科院等离子体物理研究所的 EAST 托卡马克 (Experimental Advanced Superconducting Tokamak, 全超导托卡马克核聚变实验装置)[30]，核工业西南物理研究院的 HL-2A (中国环流器 2 号 A)[32] 和 HL-2M (中国环流器 2 号 M)[31] 托卡马克，华中科技大学的 J-TEXT 托卡马克 (Joint Texas Experimental Tokamak, 联合德克萨斯实验托卡马克)[33]，清华大学的 SUNIST 球形托卡马克 (Sino-UNIted Spherical Tokamak, 中国联合球形托卡马克)[34] 等。

由于托卡马克运行时的高温环境，其内部分子原子几乎完全电离，形成等离子体 (plasma)[46]。等离子体是由大量正负带电粒子以及少部分未电离的中性粒子共同组成的电离化气态物质，且其正负电荷密度几乎相等，被认为是除了固体、液体和气体之外的第四态物质。等离子体中，由于大量正负电荷的存在，任何带电粒子周围都会被异号电荷所

表 1.1 国内外主要的托卡马克及其参数 (包括部分球形托卡马克)[29]。

装置名称	地点	大半径/m	小半径/m	磁场/T	电流/MA
EAST[30]	合肥	1.95	0.45	3.5	1.0
HL-2M[31]	成都	1.78	0.65	2.2	3.0
HL-2A[32]	成都	1.65	0.4	2.8	0.48
J-TEXT[33]	武汉	1.05	0.29	2.2	0.22
SUNIST[34]	北京	0.3	0.23	0.15	0.05
KSTAR[35]	Daejeon	1.8	0.5	3.5	2.0
JT-60U[36]	JAERI	3.4	1.1	4.2	2.5
TFTR[23]	Princeton	2.4	0.8	5.0	2.2
JET[20]	Abingdon	3.0	1.25	3.5	5.0
DIII-D[37]	General Atomics	1.67	0.67	2.1	1.6
T-10[38]	Kurchatov	1.5	0.37	4.5	0.68
Tore Supra[39]	Cadarache	2.37	0.8	4.5	2.0
ASDEX-U[40]	Garching	1.65	0.5	3.9	1.4
FTU[41]	Frascati	0.93	0.3	8.0	1.3
TEXTOR-94[42]	Julich	1.75	0.46	2.8	0.8
TCV[43]	Lausanne	0.88	0.24	1.4	0.17
MAST[44]	Culham	0.9	0.6	0.55	1.3
C-Mod[45]	Cambridge, MA	0.67	0.22	8.0	2.0

包围，形成所谓的电荷屏蔽现象。因此，定义德拜长度 λ_D (Debye length) 来描述等离子体中电荷屏蔽造成电势衰减效应的特征空间尺度：

$$\lambda_{De(i)} \equiv \sqrt{\varepsilon_0 T_{e(i)}/n_{e(i)}e^2}. \tag{1.10}$$

公式1.10中的下标‘$_{e(i)}$’表示电子 (离子)，ε_0 为真空介电常数，e 表示元电荷。λ_D 表征了等离子体维持电中性的空间尺度下限，即在远大于 λ_D 的空间尺度上，等离子体满足准电中性条件。此外，也定义等离子体振荡频率 ω_p (plasma frequency) 来表示等离子体保持准电中性的特征时间尺度 (下文 M 表示质量)：

$$\omega_{pe(i)} \equiv \sqrt{n_{e(i)}e^2/M_{e(i)}\varepsilon_0}. \tag{1.11}$$

其中电子等离子体振荡又称朗缪尔 (Langmuir) 振荡，其振荡频率 ω_{pe} 远大于离子等离子体振荡频率 ω_{pi}。因而 ω_{pe}^{-1} 表征了等离子体维持电中性的时间尺度下限，在远大于 ω_{pe}^{-1} 的时间尺度上，等离子体可以满足准中性条件。公式1.10和1.11还满足 $\omega_{pe(i)}^{-1} \approx \lambda_{De(i)}/v_{Te(i)}$，$v_{Te(i)}$ 表示电子 (离子) 特征热运动速度，该关系表明等离子体中热运动粒子间相互作用的特征空间和时间尺度分别为德拜长度和等离子体振荡频率。在托卡马克中，等离子体密度一般为 $10^{19} \sim 10^{20}\mathrm{m}^{-3}$，温度可达 $1 \sim 40\mathrm{keV}$[26]，其等离子体的德拜长度为 λ_D 约为 $10^{-5} \sim 10^{-4}\mathrm{m}$，电子等离子体振荡频率 ω_{pe} 可以达到 $10^{11} \sim 10^{12}\mathrm{s}^{-1}$，远远高于电子离子的库伦碰撞频率 ($\nu_{ei} \sim 10^3\mathrm{s}^{-1}$)[26]，因此等离子体中的碰撞过程远慢于其电子振荡。一般研究的等离子体 (不稳定性) 的空间尺度 (l) 和时间尺度 (频率 & 增长率，$\omega\&\gamma$) 通常满足 $l \gg \lambda_D$，以及 $\omega\&\gamma \ll \omega_{pe}$。

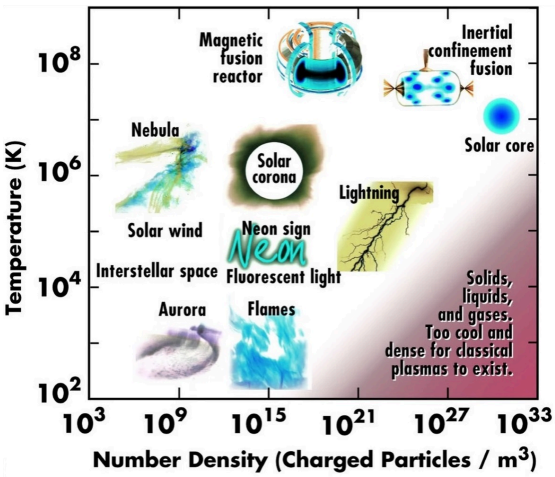

图 1.6　不同等离子体的温度和密度参数分布示意图[47]。

等离子体往往具有极高的电导率，且伴随着极强的集体 (collective) 行为，主要受长程电磁力影响，因而容易产生大尺度的波和宏观不稳定性。在托卡马克等磁约束装置的高温等离子体中，由于碰撞率极低，其速度分布函数通常偏离麦克斯韦-玻尔兹曼分布。且由于导向磁场的存在，等离子体在平行和垂直于磁力线方向上有着完全不同的行为特征，因此其分布函数往往存在很强的各向异性。除磁约束聚变装置外，星际空间、恒星、太阳风和地球电离层等环境中也充斥了大量的等离子体[48]，此外还包括实验室条件下的激光等离子体和低温/尘埃等离子体等，图1.6给出了不同等离子体的温度和密度参数分布[47]。

1.4　托卡马克中的高能量粒子

在未来 ITER 等聚变示范堆规模的托卡马克中，等离子体将被加热到 10keV 以上，从而产生足够高份额的氘氚聚变反应，并产生 3.52MeV 的 α 粒子和 14.06MeV 的中子。聚变过程所产生的中子不与等离子体和电磁场发生相互作用，直接离开等离子体。而 α 粒子则可以通过碰撞或者波-粒子相互作用 (alpha channeling[49,50])，将能量直接或间接传递给背景等离子体，使等离子体仅依赖于 α 粒子自加热便可以弥补能量损失，维持高温，从而满足式1.7所给的点火条件，产生持续的聚变反应过程，形成所谓的燃烧等离子体。

燃烧等离子体中，α 粒子能量 (3.52MeV) 远高于背景等离子体的能量 ($\gtrsim$10keV)，因此，被称为高能量粒子或者快粒子 (Energetic Particles, EPs)。聚变反应产生的 α 粒子分布函数最初是各向同性的，并形成单能的 δ 函数分布。除 α 粒子外，托卡马克中的辅助加热手段也会提供其他形式的高能量粒子，例如现有装置中，中性束注入 (Neutral Beam Injection, NBI)[51] 往往可以产生 100keV 量级的高能量粒子，而未来 ITER 托卡马克的中性束注入产生的高能量粒子则可以达到 1MeV 量级[25]。这些中性束注入的高能量粒子分布函数强烈依赖于初始的注入方向，因此是各向异性的。此外，托卡马克中还经常使用频率接近电子 (离子) 回旋频率的射频波进行加热，即电子 (离子) 回旋共振加热 (Electron Cyclotron Resonance Heating, ECRH; Ion Cyclotron Resonance Heating, ICRH)[52,53]，回旋共振加热产生

的高能量粒子速度方向主要在垂直于磁力线的方向[54]。这些高能量粒子的速度 v_h 一般满足 $v_{Ti} \ll v_h \ll v_{Te}$，粒子数密度 n_h 则通常远远小于等离子体密度 $n_{i(e)}$，即 $n_h \ll n_{i(e)}$，因此不影响背景等离子体的准电中性。

高能量粒子由于与背景电子和离子发生库伦碰撞，其分布函数往往会弛豫到所谓的慢化分布 (slowing-down distribution)[55,56]。由于碰撞导致的高能量粒子能量 (ε_h) 随时间慢化的表达式如下所示[54]：

$$\frac{d\varepsilon_h}{dt} = -\frac{2^{1/2} n_e Z_h^2 e^4 M_e^{1/2} \ln\Lambda}{6\pi^{3/2}\varepsilon_0^2 M_h}\left(\frac{\varepsilon_h}{T_e^{3/2}} + \frac{C}{\varepsilon_h^{1/2}}\right), \tag{1.12}$$

其中：

$$C = \frac{3\pi^{1/2} Z M_h^{3/2}}{4 M_e^{1/2} M_i}. \tag{1.13}$$

方程1.12右端括号内第一项和第二项分别表示高能量粒子与背景电子和背景离子碰撞导致的慢化。当第一项和第二项相等时，存在一个临界能量 $\varepsilon_{h,crit}$：

$$\varepsilon_{h,crit} = C^{2/3} T_e = \left(\frac{3\pi^{1/2} Z M_h^{3/2}}{4 M_e^{1/2} M_i}\right)^{2/3} T_e. \tag{1.14}$$

当 $\varepsilon_h > \varepsilon_{h,crit}$ 时，高能量粒子的能量主要转移给背景电子，而当 $\varepsilon_h < \varepsilon_{h,crit}$ 时，高能量粒子的能量主要转移给背景离子。以 TFTR 托卡马克上的氘氚实验为例，其 α 粒子的 $\varepsilon_{h,crit}$ 约为 0.3MeV，慢化时间尺度大约为 0.3s[56]。

同时考虑背景电子和离子对高能量粒子的慢化，可以写出关于高能量粒子分布函数 f_h 的 Fokker-Planck 方程的碰撞项[54]：

$$\left(\frac{\partial f_h}{\partial t}\right)_c = \frac{n_e Z Z_h^2 e^4 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon^2 M_h M_i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\frac{\mathbf{v}}{v^3}\left(1 + \frac{v^3}{v_{crit}^3}\right) f_h\right], \tag{1.15}$$

其中：

$$v_{crit} = \left(\frac{2\varepsilon_{h,crit}}{M_h}\right)^{1/2}. \tag{1.16}$$

根据方程1.15，可以计算出在有源项 S 的稳态情况下，高能量粒子关于速度大小的慢化分布函数为：

$$\begin{aligned} f_h(v) &= \frac{S\varepsilon_0^2 M_i M_h v_{crit}^3}{n_e Z Z_h^2 e^4 \ln\Lambda}\left(\frac{1}{v^3 + v_{crit}^3}\right) H(v_0 - v) \\ &\propto \left(\frac{1}{v^3 + v_{crit}^3}\right) H(v_0 - v), \end{aligned} \tag{1.17}$$

其中 $H(x)$ 为 Heaviside 阶跃函数，满足 $H(x) = 1,\ x \geqslant 0;\ H(x) = 0,\ x < 0$。$v_0$ 为高能量粒子的初始 (birth) 速度。图1.7展示了稳态条件下，氘氚聚变等离子体中 α 粒子的归一化速度空间分布函数，其中，v_0 为 1.3×10^7m/s，背景电子温度 T_e 为 20keV[54]。

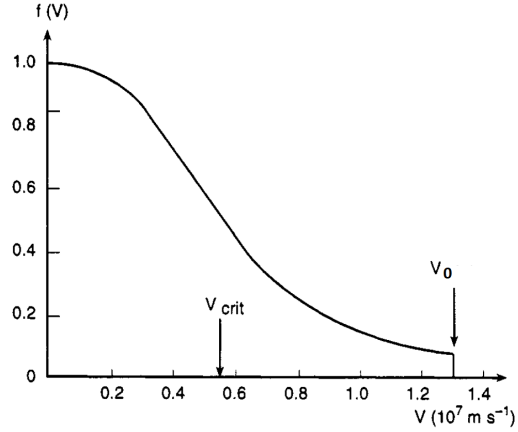

图 1.7　稳态条件下，氘氚聚变等离子体中 α 粒子的归一化速度空间分布函数，v_0 为 1.3×10^7m/s，背景电子温度 T_e 为 20keV[54]。

燃烧等离子体中，高能量粒子对背景等离子体的加热对于氘氚聚变的自持燃烧起着至关重要的作用。但一般情况下，根据上述分析，高能量粒子通过碰撞效应往往更容易优先将能量转移给背景电子，这不利于加热背景离子和维持聚变反应。为此，需要研究高能量粒子和波以及等离子体不稳定性的相互作用，来实现间接加热离子或者驱动等离子体电流的目的。即首先将高能量粒子能量转移给波，再通过波和背景离子的相互作用将能量进一步转移给后者，从而使得托卡马克能运行在热离子模式下 (hot-ion mode)[49,50]。此外，高能量粒子也容易共振激发剪切阿尔芬波 (Shear Alfvén Wave, SAW)[57] 等不稳定性，影响高能量粒子和背景等离子体的约束，进而影响氘氚聚变效率。

1.5　论文选题背景与意义

根据最新 ITER 计划的日程安排[25]，2025 年底 ITER 托卡马克将实现第一次等离子体放电，意味着磁约束聚变研究即将进入真正意义上的燃烧等离子体时代。特别是对于 Q > 5 的运行模式，氘氚聚变反应过程将产生大量的 α 粒子，此时，等离子体将主要通过 α 粒子自加热效应来维持聚变所需的高温。因此，探究和理解燃烧等离子体中可能发生的高能量粒子物理过程对于 ITER 的顺利运行和磁约束聚变的推进有着直接且深远的意义。具体包括但不限于以下研究方向：i. 高能量粒子对等离子体不稳定性的激发/抑制，以及对不稳定性非线性饱和机制的影响 [包括不同形式的阿尔芬本征模 (Alfvén Eigenmode, AE)[58]、高能量粒子模 (Energetic Particle Mode, EPM)[59]、撕裂模 (Tearing Mode, TM)[60] 和内扭曲模 (internal kink mode)[61] 等]；ii. 高能量粒子的约束问题；iii. 高能量粒子的慢化过程；iv. 高能量粒子对背景离子的加热机制等。

当前国内外的托卡马克实验绝大多数仍运行在无聚变功率输出的低参数等离子体状态下，并未触及燃烧等离子体范畴。因而，现阶段对于磁约束聚变中高能量粒子物理的研究手段主要包括：对辅助加热系统产生的高能量粒子物理进行实验研究，利用解析理论和数值模拟/计算对现有实验结果进行分析，以及对未来燃烧等离子体中高能量粒子物理的

预测等。数值模拟方面，为了尽可能准确地描述托卡马克中的高能量粒子物理过程，需要依赖于可靠的数值模拟模型和程序。为此，本论文将从浙江大学马志为教授团队自主开发的托卡马克数值模拟程序 (CLT[62] 和 CLT-K[63]) 出发，首先对程序模型和算法做严格的校验工作，并研究高能量粒子和磁流体不稳定性的相互作用过程，从而为高能量粒子物理的非线性模拟打下可靠的基础。进一步地，本论文将详细讨论高能量粒子驱动下，不同等离子体不稳定性之间的非线性相互作用过程，以及不稳定性对高能量粒子的反馈效应等。希望通过本论文的数值模拟研究，加深我们对托卡马克中高能量粒子行为和等离子不稳定性之间相互影响的非线性物理过程的理解，为将来开展燃烧等离子体实验中的相关物理现象的深入研究提供帮助。

1.6 论文结构安排

本论文第1章主要初步介绍了磁约束聚变和托卡马克燃烧等离子体研究的背景。第2章将详细介绍本论文所涉及的磁约束等离子体物理理论、模拟和实验研究现状，主要包括波-粒子共振相互作用、剪切阿尔芬波不稳定性的线性和非线性物理过程、剪切阿尔芬波的实验研究，以及磁流体和高能量粒子物理的数值研究方法等。第3章主要介绍本论文所使用的数值模拟程序 CLT[62] 和 CLT-K[63] 的数值算法以及程序的开发升级工作等。第4章将主要讨论高能量粒子和撕裂模等磁流体不稳定性相互作用的模拟研究结果，着重于探讨高能量粒子对撕裂模线性稳定性的影响，并会详细讨论高能量粒子对 EPM 的共振激发过程和机制。第5章将主要介绍关于高能量粒子与环阿尔芬本征模 (Toroidal Alfvén Eigenmode, TAE) 和撕裂模共同非线性相互作用的数值模拟结果，重点讨论撕裂模对高能量粒子的再分布过程、带状流的不同激发机制、带状流 (分量) 对撕裂模和环阿尔芬本征模非线性饱和的影响，以及撕裂模对高能量粒子再分布导致环阿尔芬本征模共振激发等物理过程。第6章将给出关于本论文模拟研究结果的总结和讨论，并对下一步研究工作做出展望。

2 高能量粒子物理和剪切阿尔芬波不稳定性

2.1 波与粒子的相互作用

2.1.1 带电粒子的运动

托卡马克平衡磁场位型下,带电粒子的未扰动轨道可以用三个守恒量来描述,分别是粒子的磁矩 $\mu \equiv Mv_\perp^2/2B$,能量 $\varepsilon \equiv \mu B + \frac{1}{2}Mv_\parallel^2$,和环向正则角动量 $P_\varphi \equiv Mv_\parallel RB_\varphi/B - Ze\psi$。然而，当托卡马克中存在不稳定性产生的扰动场时，粒子的 ε 和 P_φ 的守恒性会被破坏。此外，在本论文的研究工作中，CLT-K 程序采用的是磁流体-漂移动理学混合模型，因此使用了 μ 为绝热守恒量的条件，从而忽略高能量粒子的拉莫尔 (Lamor) 回旋运动。这样，粒子分布函数在三维相空间 $\{P_\varphi, \varepsilon, \mu\}$ 的演化可以降到二维 $\{P_\varphi, \varepsilon\}$。在第2.3节会证明，当托卡马克中存在一支环向模数为 n 的低频 (频率远小于拉莫尔回旋频率) 不稳定性模式时，P_φ 和 ε 的组合，$\varepsilon' = \varepsilon - \omega P_\varphi/n$ 为一个新的守恒量[57]。

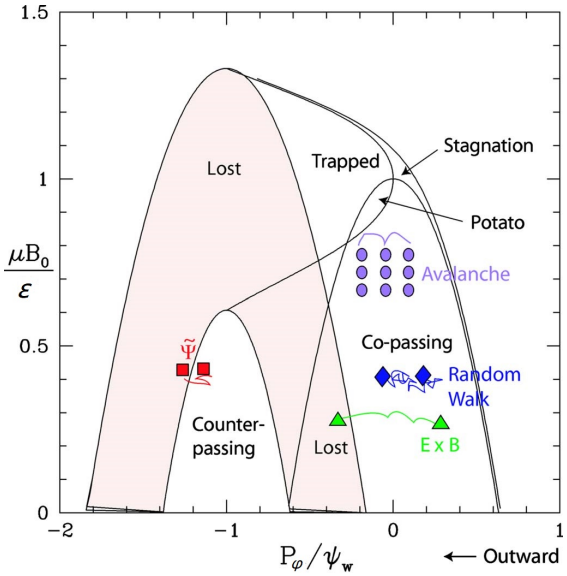

图 2.1 DIII-D 托卡马克中中性束粒子的不同轨道类型相空间分布示意图[58]。

托卡马克中，只考虑粒子的导心漂移运动的轨道特征，背景粒子主要可以分为通行 (passing) 粒子和捕获 (trapped) 粒子两类，而高能量粒子除了通行和捕获这两类，还包括停滞 (stagnation) 粒子和土豆 (potato) 粒子等[58]。图2.1展示了二维相空间 $\{\mu B_0/\varepsilon, P_\varphi\}$ 中 DIII-D 托卡马克中性束粒子轨道的分类[58]。其中，通行粒子的平行速度相对于垂直速度较大，粒子相对于磁力线的投掷角 Λ (pitch angle) 一般小于 1，即 $\Lambda \equiv \mu B_0/\varepsilon < 1$，使得垂

直动能始终小于总动能。因此其平行方向的速度始终大于零，粒子的环向运动方向不会发生反转，且粒子轨道较大，可以跨过磁轴。由于 μ 的守恒性，通行粒子的平行速度在弱场侧较大，在强场侧较小。此外，通行粒子可以分为同向通行和反向通行，如图2.2 (a) 所示，一般同向通行粒子的平行速度方向与环向等离子体电流方向一致，其漂移轨道整体向弱场侧偏移。而反向通行粒子的平行速度方向与环向等离子体电流方向相反，其漂移轨道整体向强场侧偏移。通行粒子整体沿着磁力线运动，其运动方式称为渡越运动 (transit)。

另一类主要的粒子轨道为捕获粒子，捕获粒子的平行速度相对于垂直速度较小，因此投掷角一般大于或接近 1，即对应图2.1的相空间 $\Lambda \gtrsim 1$ 附近。当捕获粒子从弱场侧向强场侧运动时，由于磁场增强，其平行速度减小到零，随后发生反转，粒子环向沿反向运动。捕获粒子的轨道无法跨过磁轴，形成如图2.2 (b) 黄线和图3.1蓝线所示的捕获粒子轨道，捕获粒子轨道由于其形状类似于香蕉，也被称为香蕉 (banana) 轨道。捕获粒子的运动可以分解为极向的香蕉形反弹运动 (bounce) 和环向的进动 (precession)。

此外，托卡马克中还存在如图2.2 (b) 所示的停滞粒子和土豆粒子。其中停滞粒子的平行速度始终和环向等离子体电流方向一致，即类似于同向通行粒子，但平行速度较小，粒子轨道未跨过磁轴，始终在弱场侧运动。而土豆粒子和捕获粒子类似，会存在平行速度反转的反弹点，但由于其轨道宽度较大，跨过磁轴。这两类粒子在托卡马克中所占份额较少，因此本论文不会单独讨论这两类粒子对等离子体不稳定性的影响，而主要考虑上述的同向通行粒子、反向通行粒子和捕获粒子。

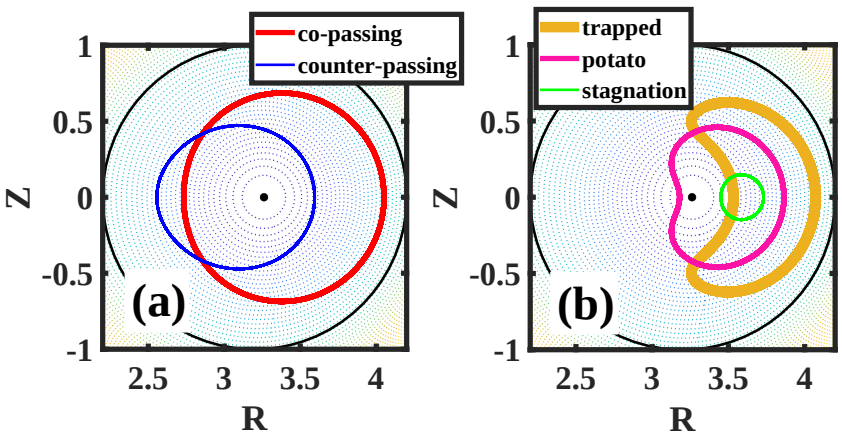

图 2.2　CLT-K 程序计算得到的不同类型粒子导心运动轨道极向投影，包括同向通行 (co-passing) 粒子、反向通行 (counter-passing) 粒子、捕获 (trapped) 粒子、停滞 (stagnation) 粒子和土豆 (potato) 粒子。

图2.1还表示了托卡马克中常见的四种高能量粒子输运过程[58]：红色方块表示波/不稳定性对平衡磁场 $\tilde{\Psi}$ 的扰动导致靠近边界的粒子离开等离子体边界；绿色方块表示高能量粒子和波/不稳定性共振在相同相位时产生锁相 (phase-locked)，通过 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 漂移将高能量粒子以对流 (convective) 的形式输运到边界，导致高能量粒子的损失。这种对流形式的粒子损失正比于不稳定性的幅值，通常由 EPM 触发。主要原因是 EPM 的频率可以随着径

向漂移粒子轨道频率的变化而变化，从而最大程度保持共振条件和相位的匹配；蓝色菱形表示当粒子和多个波发生共振时，粒子由于随机性的运动，产生扩散性 (diffusive) 的输运，其输运大小一般和不稳定性振幅的平方成正比；紫色圆圈表示高能量粒子在向外输运的过程中，局部增强高能量粒子分布函数的径向梯度，并激发新的不稳定性，从而进一步促进高能量粒子径向向外输运，形成雪崩式 (avalanche) 的高能量粒子损失和不稳定性激发。

2.1.2 波-粒子共振条件

存在剪切阿尔芬波等不稳定性产生的扰动电场 $\delta\mathbf{E}$ 情况下，粒子的能量变化主要由波-粒子的非绝热共振机制导致。粒子与波的能量交换主要通过 $Ze\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{E}$ 产生，其中 $\mathbf{v}$ 为粒子的运动速度。由于在本论文的模型中忽略了粒子的回旋运动，粒子的速度 $\mathbf{v}$ 主要由漂移速度 $\mathbf{v}_d$ 提供。而在剪切阿尔芬波和其他理想磁流体不稳定性中，平行于磁场方向的电场扰动 $\delta\mathbf{E}_{\parallel}$ 几乎为零，扰动电场主要由 $\delta\mathbf{E}_{\perp}$ 贡献。从而可以把波与粒子相互作用中粒子的能量变化写为：

$$\delta\varepsilon \simeq \oint Ze\mathbf{v}_d\cdot\delta\mathbf{E}_{\perp}dt, \tag{2.1}$$

$\oint dt$ 表示沿着粒子完整漂移轨道遍历多圈的积分 (圈数 $\gg 1$)。托卡马克中由于不稳定性产生的扰动电场 $\delta\mathbf{E}_{\perp}$ 和等离子体位移 $\boldsymbol{\xi}$ 通常可以写成如下形式：

$$\delta\mathbf{E}_{\perp}\sim\boldsymbol{\xi}=\sum_{n,m}\xi_{n,m;j}\mathbf{e}_j\left(r\right)\exp\left[-i\left(\omega t-n\varphi+m\theta\right)\right], \tag{2.2}$$

其中下标‘$_j$’表示 $\{r,\,\theta,\,\varphi\}$ 坐标系下的不同方向分量，$\mathbf{e}_j$ 表示 j 方向单位矢量，n 和 m 分别表示不稳定性的环向和极向模数。由于托卡马克极向的不对称性，粒子的漂移运动可以在极向进行傅里叶分解，即：

$$\mathbf{v}_d=\sum_{l}v_{l;j}\mathbf{e}_j\exp\left(-il\theta\right). \tag{2.3}$$

从而根据式2.1-2.3，粒子运动过程中感受到的扰动电场对其能量的影响表示为：

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &\propto \oint Ze\sum_{n,m}\xi_{n,m;j}\mathbf{e}_j\left(r\right)\exp\left[-i\left(\omega t-n\varphi+m\theta\right)\right]\cdot\sum_{l}v_{l;j}\mathbf{e}_j\exp\left(-il\theta\right)dt\\ &=\oint Ze\sum_{n,m,l;j}\left[\xi_{n,m;j}\left(r\right)v_{l;j}\right]\exp\left\{-i\left[\omega t-n\varphi+\left(m+l\right)\theta\right]\right\}dt.\end{aligned} \tag{2.4}$$

对于漂移运动粒子，假设从 $\varphi=0,\,\theta=0$ 处出发，t 时刻所在坐标的环向和极向角满足 $\varphi\simeq\omega_{\varphi}t$，$\theta\simeq\omega_{\theta}t$，其中：

$$\begin{aligned}\omega_{\varphi}&=\Delta\varphi/T_{\theta},\\ \omega_{\theta}&=2\pi/T_{\theta},\end{aligned} \tag{2.5}$$

ω_φ 和 ω_θ 分别为粒子沿漂移轨道运动的平均环向和极向频率，而 T_θ 为粒子极向运动一周所需的时间，$\Delta\varphi$ 为粒子在时间 T_θ 内在环向所走过的角度。因此方程2.4变为：

$$\delta\varepsilon \propto \oint Ze \sum_{n,m,l;j} \left[\xi_{n,m;j}\left(r\right) v_{l;j}\right] \exp\left\{-i\left[\omega - n\omega_\varphi + \left(m+l\right)\omega_\theta\right] t\right\} dt. \tag{2.6}$$

方程2.6括号内 $[\omega - n\omega_\varphi + (m+l)\,\omega_\theta]\,t$ 表示了粒子和波之间的相对相位变化。当满足 $\omega - n\omega_\varphi + (m+l)\,\omega_\theta \simeq 0$ 时，方程2.6的被积分项基本不含时，或者对时间依赖很弱，即粒子和波的相对相位基本锁定。因此沿着粒子完整轨道积分多圈后 ($\oint dt$ 的积分时间范围应远大于 T_θ)，可以得到较大幅值的 $\delta\varepsilon$，表示波与粒子有净的能量交换。而当 $\omega - n\omega_\varphi + (m+l)\,\omega_\theta \neq 0$ 时，方程2.6的被积分项随时间振荡，因此沿着粒子完整轨道积分多圈后，其净能量变化 $\delta\varepsilon$ 一般趋于零，即波与粒子没有发生明显的能量交换。因此，波与粒子的共振条件[57,58,64] 可以写为：

$$\omega - n\omega_\varphi + p\omega_\theta = 0, \tag{2.7}$$

其中，$p = m + l$。此外，上述共振条件也可以等价地表示为：

$$n\Delta\varphi - \omega T_\theta = p2\pi, \tag{2.8}$$

即粒子极向运动一周后，粒子和波相对相位的变化量为 2π 的整数倍 ($p2\pi$)。

方程2.7-2.8的共振条件也可以推广到 p 为分数的情况，也就是 $p = (m+l)/K$，其中 K 为整数且 $K > 1$。表示粒子需要沿着极向运动 K 圈后，其所在位置的波的相位才与初始相位相同，也就是变化了 $(m+l)\,2\pi$，而 $\oint dt$ 的积分时间范围应远大于 KT_θ。p 为分数的情况也被称作分数共振、高阶共振或者非线性共振[57]。对于常见的线性稳定性问题，整数共振一般为主要机制。本论文所研究的内容也只涉及到了方程2.7-2.8对应的整数共振情况。

对于托卡马克中的捕获粒子，ω_φ 为其环向的进动频率 (processional frequency)，ω_θ 为其极向的反弹频率 (bounce frequency)。而对于通行粒子，ω_φ 等于其环向渡越运动的渡越频率 (tansit frequency)，ω_θ 为其极向周期性运动的频率，也可以和捕获粒子类似地称作反弹频率。CLT-K 程序根据公式2.5直接计算通行粒子和捕获粒子的环向频率 ω_φ 和极向频率 ω_θ。

以通行粒子激发 TAE 为例，TAE 的频率接近连续谱的 TAE 间隙 (gap) 频率，即 $\omega_{TAE} \simeq v_A/2qR$，$m$ 和 $m+1$ 耦合的 TAE 间隙位置对应的安全因子为 $q = (m+1/2)/n$，而通行粒子的环向频率约为 $v_\parallel/R$，极向频率约为 $v_\parallel/qR$，将上述条件代入式2.7可以得到 $v_\parallel = v_A/(1-2l)$[58]。因此对于 $l = \pm 1$，通行高能量粒子和 TAE 的共振速度大小分别为 $v_\parallel = v_A$ 和 $v_\parallel = v_A/3$，这两个平行速度的共振也是通行高能量粒子激发 TAE 的主要机制。随着 l 进一步增大，通行高能量粒子和 TAE 的共振速度逐级降低。关于 TAE 的线性物理以及共振激发机制将在下文第2.2和2.3节中做进一步介绍。

2.2 剪切阿尔芬波不稳定性

2.2.1 磁流体力学波

托卡马克等离子体中主要存在宏观和微观两类不稳定性。微观不稳定性主要包括背景离子和电子回旋半径尺度的漂移波湍流等，会影响等离子体的约束和输运；而宏观不稳定性往往伴随着等离子体的集体响应，导致磁面的大尺度形变或破坏，降低托卡马克的整体约束性能，并限制托卡马克的运行参数。宏观不稳定性空间尺度一般远大于背景离子的回旋半径，频率一般远低于离子回旋频率 ω_{ci} 和等离子体离子振荡频率 ω_{pi}，因此通常可以忽略背景粒子的动理学效应，适合用磁流体力学 (MagnetoHydroDynamics, MHD) 来描述。当然，在特定的情况下，对于一些宏观不稳定性的介观或者微观尺度效应，例如动理学阿尔芬波[65] 和无碰撞磁场重联问题[48] 等，还需要考虑背景离子的有限拉莫尔轨道效应和电子的惯性效应等，以此来完善磁流体力学模型对相应宏观不稳定性的描述。本论文所关注的剪切阿尔芬波为磁化等离子体中的低频电磁波，最早由 Hannes Alfvén 于 1942 年发现[66]，起初被用来解释日冕反常加热问题，即高电导率的流体 (等离子体) 中外加磁场，流体垂直于磁力线方向的运动可以激发起沿着磁力线传播的低频电磁-流体力学波 (electromagnetic-hydrodynamic wave)，从而将太阳光球层的能量传递到日冕和太阳风，导致日冕加热现象。该低频电磁-流体力学波即为现在著名的剪切阿尔芬波，Alfvén 也因相关工作获得 1970 年诺贝尔物理学奖。

磁化等离子体中剪切阿尔芬波和其他几支磁流体力学波线性色散关系的推导可以从理想磁流体方程组出发[67]。考虑最简单的情况，假定等离子体初始为均匀无界、准中性、可压缩、无粘滞，以及绝热的静止 (平衡速度和电流为零) 理想导体流体，且存在稳定的磁场，采用高斯单位制 (Gaussian Units)，满足：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \tag{2.9}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{2.11}$$

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \tag{2.12}$$

$$\frac{p}{\rho^{\Gamma}} = \text{constant}, \tag{2.13}$$

其中，ρ、$\mathbf{v}$、p、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{J}$ 分别为等离子体密度、速度、压强、磁场和电流密度，Γ 为绝热常数。$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ 为随体导数 (material derivative)。通过将上述物理量写成平衡量 (下标 ‘$_0$’) 加扰动量 (δ) 的形式，即 $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \delta\rho(\mathbf{r}, t)$，$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$，$p(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}) + \delta p(\mathbf{r}, t)$，$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$，$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$，从而可以将方程2.9-2.13线性化。由于平衡量对时间和空间都无依赖，扰动量 δQ 写成关于频率 ω 和波矢

$\mathbf{k}$ 的平面波波动形式，即 $\delta Q(\mathbf{r},\, t) = \delta\tilde{Q}_{\omega,\mathbf{k}} \exp\left[-i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right]$，并代入方程2.9-2.13线性化后的形式中 (省略‘~’和下标‘$_{\omega,\mathbf{k}}$’)，得到：

$$\omega\delta\rho = \rho_0\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}, \tag{2.14}$$

$$\rho_0\omega\delta\mathbf{v} = \mathbf{k}\delta p + i\frac{1}{c}\left(\delta\mathbf{J}\times\mathbf{B}_0\right), \tag{2.15}$$

$$\omega\delta\mathbf{B} = -\mathbf{k}\times\left(\delta\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0\right), \tag{2.16}$$

$$\frac{4\pi}{c}\delta\mathbf{J} = i\mathbf{k}\times\delta\mathbf{B}, \tag{2.17}$$

$$\omega\delta p = \Gamma p_0\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}. \tag{2.18}$$

将方程2.14、2.16-2.18代入动量方程2.15中，我们可以得到如下形式的波动方程：

$$\begin{aligned}-\omega^2\delta\mathbf{v} + \left(v_S^2 + v_A^2\right)\left(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}\right)\mathbf{k} + \\ v_A^2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}_0\right)\left[\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}_0\right)\delta\mathbf{v} - \left(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v}\right)\mathbf{b}_0 - \left(\mathbf{b}_0\cdot\delta\mathbf{v}\right)\mathbf{k}\right] = 0,\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中 $\mathbf{b}_0$ 为平衡磁场方向的单位矢量，$v_S = \left(\Gamma p_0/\rho_0\right)^{1/2}$，$v_A = B_0/\left(4\pi\rho_0\right)^{1/2}$ 分别为平衡位型下的声速和阿尔芬速度。不失一般性，我们可以假设平衡磁场 $\mathbf{B}_0$ 在 z 方向，而波矢在 $y-z$ 平面上，则可以定义平行和垂直磁力线方向的波矢分量 $\left\{k_\perp,\, k_\parallel\right\}$ 满足 $\mathbf{k} = k_\perp\hat{y} + k_\parallel\hat{z}$，代入方程2.19，可以得到：

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k_\parallel^2 v_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - k_\perp^2 v_S^2 - k^2 v_A^2 & -k_\perp k_\parallel v_S^2 \\ 0 & -k_\perp k_\parallel v_S^2 & \omega^2 - k_\parallel^2 v_S^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z\end{pmatrix} = 0. \tag{2.20}$$

为使方程组2.20有解，我们令方程组2.20左侧的矩阵的行列式 (determinant) 为零，得到该系统中可以存在的磁流体力学波的色散关系，分别是：

$$\omega^2 = k_\parallel^2 v_A^2, \tag{2.21}$$

和：

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1}{2}k^2\left(v_A^2 + v_S^2\right)\left[1 \pm \left(1 - \varpi^2\right)^{1/2}\right], \\ \varpi^2 &= \frac{4k_\parallel^2 v_A^2 v_S^2}{k^2\left(v_A^2 + v_S^2\right)^2},\end{aligned} \tag{2.22}$$

若只考虑平行于 $\mathbf{b}_0$ 的 δv_z 扰动 ($k_\perp = 0$)，我们还可以得到声波的色散关系：

$$\omega^2 = k_\parallel^2 v_S^2. \tag{2.23}$$

由于公式2.22中 $1-\varpi^2$ 始终大于等于零，因此公式2.21和2.22都满足 ω 为实数，即 $\mathrm{Im}(\omega) = 0$，表示该均匀磁化等离子体系统是稳定平衡的。公式2.21和2.22只表示了该磁化等离子体系统中不同波的振荡形式，不包含波的阻尼率和增长率。

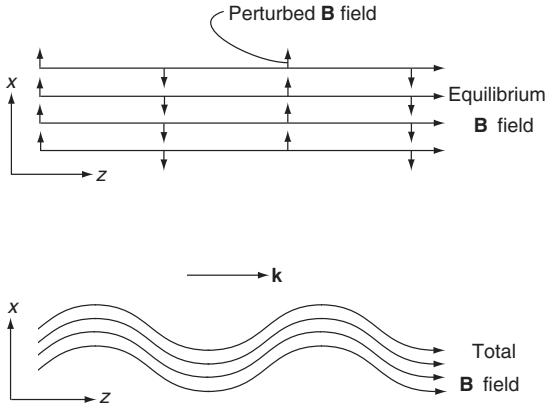

图 2.3 剪切阿尔芬波的磁场扰动和传播方向示意图[67]。

公式2.21表示剪切阿尔芬波的色散关系，其波矢平行于磁力线 ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{b}_0$)，相速度等于 v_A，其扰动速度 $\delta\mathbf{v}$、扰动磁场 $\delta\mathbf{B}$ 以及扰动电场 $\delta\mathbf{E}$ 都垂直于平衡磁场和波矢，因此是横波 (transverse wave)。如图2.3所示[67]，剪切阿尔芬波的传播产生磁力线的弯曲 (bend)，并由于磁冻结效应，流体元以 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$ 的速度垂直于平衡磁力线运动，磁力线的弯曲产生的磁张力提供垂直于磁力线方向的恢复力，使得扰动沿着磁力线传播。此外，剪切阿尔芬波还满足 $\nabla\cdot\delta\mathbf{v} = \mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v} = 0$，是不可压缩波，一般不会产生密度和压强的扰动。

公式2.22的正负号分别表示系统中的快磁声波和慢磁声波 (fast/slow magnetosonic wave)。托卡马克等磁约束等离子体，一般满足低-β 条件，即 $\beta \sim v_S^2/v_A^2 \ll 1$，因此 $(1-\varpi^2)^{1/2} \approx 1-\varpi^2/2$，正负号对应的快慢磁声波 ($\omega_+/\omega_-$) 分别可以近似为：

$$\omega_+^2 \simeq k^2\left(v_A^2+v_S^2\right)\left[1-\frac{k_\parallel^2 v_A^2 v_S^2}{k^2\left(v_A^2+v_S^2\right)}\right] \approx k^2 v_A^2, \tag{2.24}$$

$$\omega_-^2 \simeq k_\parallel^2 v_S^2 \frac{v_A^2}{\left(v_A^2+v_S^2\right)} \approx k_\parallel^2 v_S^2. \tag{2.25}$$

公式2.24的 ω_+ 即对应快磁声波在低-β 近似下的压缩阿尔芬波 (Compressional Alfvén Wave, CAW) 色散关系。压缩阿尔芬波的传播方向主要垂直于磁力线，速度扰动量也主要和其传播方向一致，而磁场扰动主要为平行于 $\mathbf{b}_0$ 的扰动 (垂直于传播方向)，电场扰动垂直于传播方向和 $\mathbf{b}_0$，且 $\nabla\cdot\delta\mathbf{v} = \mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{v} \neq 0$，是可压缩波，会产生密度和压强的扰动。如图2.4 (a) 所示，压缩阿尔芬波的波动形式主要为磁力线的疏密/强度变化和等离子体压缩在垂直于磁力线方向的传播。而公式2.25的 ω_- 即对应慢磁声波在低-β 近似下回到声波的色散关系式2.23。如图2.4 (b) 所示，声波的速度扰动和传播方向平行于磁力线方向，其本质为等离子体平行于 $\mathbf{b}_0$ 方向的惯性和等离子体可压缩性的平衡。压缩阿尔芬波和声波都是纵波 (longitudinal wave)。

在托卡马克等封闭离子体系统中，压缩等离子体往往会提高系统的势能，需要做正功，因此可压缩的等离子体运动通常是相对稳定的。而剪切阿尔芬波这样的不可压缩波，由于

其波矢在平行于磁力线方向，与粒子的最低阶轨道的运动方向相同，因此更容易被托卡马克中速度接近 v_A 的高能量粒子或者外加天线激发，从而产生集体性的等离子体振荡行为，因此剪切阿尔芬波是托卡马克中最危险的模式之一[67,68]。

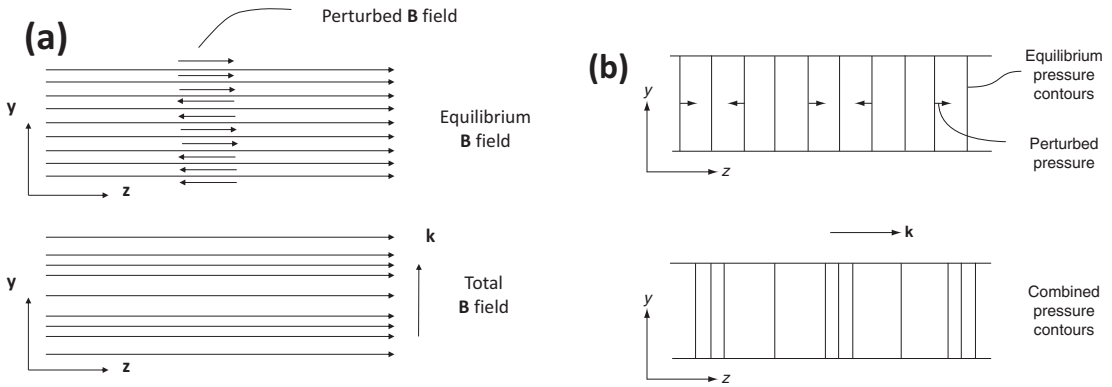

图 2.4　(a) 压缩阿尔芬波的磁场扰动和传播方向示意图；(b) 声波的压强扰动和传播方向示意图[67]。

2.2.2　托卡马克中的剪切阿尔芬波不稳定性

2.2.2.1　轴对称非均匀等离子体中的剪切阿尔芬波

上一节我们讨论了最简单情况下，即无限均匀磁化等离子体中的磁流体力学波，包括剪切阿尔芬波、压缩阿尔芬波和声波等。在这一节，我们将从非均匀轴对称的磁化等离子体系统出发，推导剪切阿尔芬波的色散关系，进而讨论托卡马克位型下的剪切阿尔芬波不稳定性。首先我们考虑具有轴对称性质的直柱位型磁化等离子体，平衡磁场主要在轴向(对应直柱位型 z 方向和环位型 φ 方向)，剪切阿尔芬波垂直于平衡磁场方向的特征尺度为 a/n，平行于平衡磁场的特征尺度为 R_0。这里我们主要讨论高模数 (高-$n, n \gg 1$) 的剪切阿尔芬波，满足 $\sim \exp(-i\omega t + in\varphi)$。这是因为在非均匀等离子体中，平衡的不均匀性会导致剪切阿尔芬波和压缩阿尔芬波耦合在一起[68]，而高-n 的假设是为了将剪切阿尔芬波和压缩阿尔芬波从时间尺度上解耦。从准中性条件 ($\nabla \cdot \delta\mathbf{J} = 0$) 和平行安培定律出发，可以得到：

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{J}_\perp + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\delta J_\parallel}{B_0} \right) = 0, \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} \delta J_\parallel &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \times (\nabla \times \delta\mathbf{A}) \\ &= -\frac{c}{4\pi} \nabla_\perp^2 \delta A_\parallel \left[1 + O\left(\frac{a}{nR_0} \right) \right]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

并根据理想欧姆定律满足 $\delta E_\parallel = 0$，扰动电势 $\delta\phi$ 和平行扰动磁矢势 $\delta\mathbf{A}_\parallel$ 满足：

$$-\mathbf{b}_0 \cdot \nabla \delta\phi + i\frac{\omega}{c} \delta\mathbf{A}_\parallel = 0. \tag{2.28}$$

而垂直扰动电流则可以从动量方程2.10的垂直方向力学平衡得到：

$$\delta\mathbf{J}_\perp = -i\omega\frac{c}{B_0^2}\rho_0\mathbf{B}_0\times\delta\mathbf{v}_\perp + \frac{c}{B_0^2}\mathbf{B}_0\times\nabla\delta P + \frac{J_{0\parallel}}{B_0}\delta\mathbf{B}_\perp - \frac{\delta B_\parallel}{B_0}\frac{c}{B_0^2}\mathbf{B}_0\nabla P_0, \tag{2.29}$$

其中 $\delta\mathbf{v}_\perp = cB_0^{-1}\mathbf{b}_0\times\nabla_\perp\delta\phi$，并由于等离子体的不可压缩性，压强扰动满足：

$$\delta P \simeq \frac{c}{i\omega}\frac{\mathbf{B}_0\times\nabla_\perp\delta\phi}{B_0^2} \approx \frac{ck_\perp}{\omega B_0}\frac{\partial P_0}{\partial r}\delta\phi. \tag{2.30}$$

将上述关系式带入公式2.29，并定义磁场曲率 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b}_0\cdot\nabla\mathbf{b}_0$，我们可以得到：

$$\begin{aligned}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\nabla\cdot\delta\mathbf{J}_\perp = i\nabla\cdot\left[\frac{c^2}{B_0^2}\rho_0\omega\nabla_\perp\delta\phi\right] - 2c\boldsymbol{\kappa}\times\frac{\mathbf{B}_0}{B_0^2}\cdot\nabla_\perp\delta P \\ - c\frac{\mathbf{B}_0\times\nabla P_0}{B_0^4}\cdot\nabla_\perp\left(4\pi\delta P + B_0\delta B_\parallel\right).\end{aligned} \tag{2.31}$$

在高-n 条件下，剪切阿尔芬波时间尺度远大于压缩阿尔芬波 $[\sim O(nR_0/a)]$，故系统在垂直于 $\mathbf{b}_0$ 方向基本满足平衡条件，即 $\nabla_\perp(P_0 + B_0^2/8\pi)\simeq 0$，也就是 $4\pi\delta P + B_0\delta B_\parallel \simeq 0$，因此可以忽略公式2.31中的最后一项。并将公式2.27和2.31代入准中性条件2.26，可以得到如下形式的涡量方程 (vorticity equation)[68]：

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_0\cdot\nabla\left[\frac{1}{B_0}\nabla_\perp^2\mathbf{b}_0\cdot\nabla\delta\phi\right] + \nabla\cdot\left[\frac{4\pi\rho_0}{B_0^2}\omega^2\nabla_\perp\delta\phi\right] \\ - 8\pi\boldsymbol{\kappa}\times\frac{\mathbf{B}_0}{B_0^2}\cdot\nabla_\perp\left[\left(\frac{\mathbf{B}_0\times\nabla P_0}{B_0^2}\right)\cdot\nabla_\perp\delta\phi\right] = 0.\end{aligned} \tag{2.32}$$

涡量方程2.32一般性地描述了低-β (忽略等离子体的可压缩性) 和轴对称的非均匀磁化等离子体系统中的高-n 剪切阿尔芬波，将其应用于不同的等离子体位型，例如直柱位型或者托卡马克，即可得到相对应的剪切阿尔芬波的色散关系。

2.2.2.2 直柱位型下的剪切阿尔芬波

首先，我们考虑简单的柱位型情况，假设扰动电势满足：

$$\delta\phi(r,\theta,z,t) = \delta\hat{\phi}_{m,n}(r,\omega)\exp\left[-i\omega t + i\left(nz/R_0 - m\theta\right)\right], \tag{2.33}$$

并对给定的 m, n，平行波矢为 $k_\parallel(r) = [n - m/q(r)]/R_0$ (此处考虑单 n 模式，故省略下标 '$_n$')。则方程2.32可以写成：

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3R_0^2\left(k_{\parallel,m}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\delta\hat{\phi}_{m,n}(r,\omega)}{r}\right] = \\ \left[\frac{m^2-1}{r^2}R_0^2\left(k_{\parallel,m}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{R_0^2}{v_A^2}\right)\frac{\omega^2}{r}\right]\delta\hat{\phi}_{m,n}(r,\omega).\end{aligned} \tag{2.34}$$

对于方程2.34所描述的本征值问题，我们将 $-\omega^2$ 替换为 $\partial^2/\partial t^2$ 即可转化为初值问题，对其求解可以得到扰动电势 $\delta\phi_{m,n}(r,t)$ 的含时演化关系满足：

$$\delta\phi_{m,n}(r,t) \sim \frac{1}{t}\exp\left[-i\omega_A(r)t\right]. \tag{2.35}$$

当方程2.34的二阶导数系数为零时，$\delta\hat{\phi}$ 的解存在奇异性，对应的 $\omega=\omega_A(r)$ 构成径向的剪切阿尔芬波连续谱，其中：

$$\omega_A^2(r)=k_\parallel^2(r)v_A^2=\frac{v_A^2}{R_0^2}\left(n-\frac{m}{q(r)}\right)^2. \tag{2.36}$$

尽管在推导涡量方程2.32时用了高-n 近似，但方程2.35-2.36的结果是更加广义的，并不受高-n 条件的限制。方程2.35-2.36描述了在非均匀等离子体中剪切阿尔芬波由于在不同位置以各自的连续谱频率振荡造成相混 (phase mixing)，使得扰动电势振荡随时间以 $1/t$ 的规律衰减，形成无碰撞的连续谱阻尼 (continuum damping)[68,69]。由于连续谱阻尼造成的剪切阿尔芬波衰减速度正比于连续谱的径向梯度 $\partial_r\omega_A(r)$[69]，在连续谱的极值处，剪切阿尔芬波可以避免受到连续谱阻尼，并形成剪切阿尔芬波的本征模式，即所谓的阿尔芬本征模。在直柱位型下，由于等离子体密度 $\rho(r)$ 等参数在径向的不均匀性，可以形成局部的剪切阿尔芬波连续谱极值点，在连续谱极值点附近可以存在全域阿尔芬本征模 (Global Alfvén Eigenmode, GAE)[68]。而类似的，若安全因子 $q(r)$ 在径向范围非单调变化，存在极小值点 q_{min}，满足 $\partial_r\omega_A(r)=0$，则在该 q_{min} 对应的连续谱极值点还可以存在反剪切阿尔芬本征模 (Reversed Shear Alfvén Eigenmode, RSAE)[70]。

2.2.2.3 环位型下的剪切阿尔芬波

在托卡马克这样的环位型磁化等离子体中，由于环向磁场在极向存在强弱变化，因此直柱位型系统 θ 方向的对称性被破坏，造成不同 m 的剪切阿尔芬波互相耦合。从而 m 不再是描述该环位型系统的好量子数 (good quantum number)，而环向的对称性仍然存在，因此 n 仍然是好量子数。考虑托卡马克等环位型装置，其本征方程相比于柱位型下的方程2.34会多出一项环效应的贡献项 [正比于 ϵ_0，$\epsilon_0=O(\varepsilon)$，$\varepsilon=a/R_0$]，即：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3R_0^2\left(k_{\parallel,m}^2-\frac{\omega^2}{v_A^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\delta\hat{\phi}_{m,n}(r,\omega)}{r}\right]=\\&\left[\frac{m^2-1}{r^2}R_0^2\left(k_{\parallel,m}^2-\frac{\omega^2}{v_A^2}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{R_0^2}{v_A^2}\right)\frac{\omega^2}{r}\right]\delta\hat{\phi}_{m,n}(r,\omega)+\\&\omega^2\frac{\partial}{\partial r}\epsilon_0\frac{R_0^2}{v_A^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\delta\hat{\phi}_{m+1,n}(r,\omega)+\delta\hat{\phi}_{m-1,n}(r,\omega)\right].\end{aligned} \tag{2.37}$$

方程 (组) 2.37右端的最后一项描述了环位型下，不同 m 的剪切阿尔芬波存在互相耦合。对于给定的模数 m, n，若我们考虑一个半有理面满足 $q_0=(m+1/2)/n$，则在柱位型下 ($\epsilon_0=0$)，根据连续谱方程2.36，该有理面上存在两支相邻奇异解 (即对应的连续谱相交点)，分别为 $\delta\hat{\phi}_{m,n}$ 和 $\delta\hat{\phi}_{m+1,n}$，其频率同时满足 $\omega_{A0}^2=v_{A0}^2/(4q_0^2R_0^2)$。而考虑方程 (组) 2.37最后一项的环效应贡献后 ($\epsilon_0\neq0$)，ω_{A0} 附近的连续谱会产生间隙。简单起见，我们只考虑方程 (组) 2.37由 $\delta\hat{\phi}_{m,n}$ 和 $\delta\hat{\phi}_{m+1,n}$ 组成的二元常微分方程组，令 $\delta\hat{\phi}_{m,n}$ 和 $\delta\hat{\phi}_{m+1,n}$ 二阶导 $\partial^2/\partial r^2$ 的系数构成的矩阵行列式为零[71]，即可得到奇异性的 $\delta\hat{\phi}$ 模结构解，对应的 $\omega_A(r)$ 由柱位

型的两支相交的 m 和 $m+1$ 连续谱变为两支独立的 ω_{A+} 和 ω_{A-} 连续谱，即构成环位型下的剪切阿尔芬波连续谱，满足

$$\omega_{A\pm}^2 = \frac{k_{\parallel,m}^2 + k_{\parallel,m+1}^2 \pm \sqrt{\left(k_{\parallel,m}^2 - k_{\parallel,m+1}^2\right)^2 + 4\epsilon_0 k_{\parallel,m}^2 k_{\parallel,m+1}^2}}{2\left(1-\epsilon_0^2\right)} v_A^2. \tag{2.38}$$

此外，还可以计算出在 ω_0 附近连续谱的间隙宽度 $\delta\omega_\omega$ 为

$$\delta\omega_\omega = \epsilon_0 \left|\omega_{A0}\right| \sqrt{1-(2m+1)^{-2}}. \tag{2.39}$$

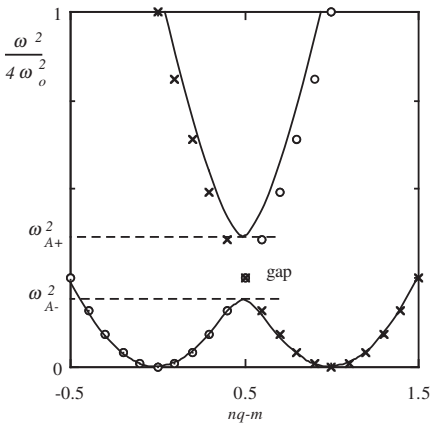

图 2.5 圆形 (○) 和十字 (×) 分别表示了柱位型下 $(m,\ n)$ 和 $(m+1,\ n)$ 剪切阿尔芬波连续谱。实线表示了考虑环效应后计算得到的剪切阿尔芬波连续谱。虚线表示环位型下由于 m 和 $m+1$ 耦合产生的 TAE 间隙[68]。

环效应导致的剪切阿尔芬波连续谱如图2.5实线所示，在 $\epsilon_0 = 0$ 极限下，公式2.38的 ω_{A+} 和 ω_{A-} 分别回到柱位型下的 m 和 $m+1$ 两支剪切阿尔芬波的连续谱。在图2.5虚线所对应的连续谱间隙内，可以存在离散的剪切阿尔芬波本征模式，被称为环阿尔芬本征模 (TAE)，而图2.5所示环效应产生的频率间隙也被称为 TAE 间隙。间隙内 TAE 的本征频率和模结构可以通过打靶法 (shooting method)[71,72] 或者本征矩阵法[73] 求解方程 (组) 2.37得到。半有理面处 $[q_0 = (m+1/2)/n]$ 的 TAE 的模结构主要由 m 和 $m+1$ 耦合而成，频率约为 $|\omega_{A0}| = v_{A0}/2q_0R_0$，$\delta\hat{\phi}_{m,n}$ 和 $\delta\hat{\phi}_{m+1,n}$ 对应的平行波矢在半有理面处分别为 $k_{\parallel m,n} = 1/2q_0R_0$ 和 $k_{\parallel m+1,n} = -1/2q_0R_0$。因此 $\delta\hat{\phi}_{m,n}$ 和 $\delta\hat{\phi}_{m+1,n}$ 这两支剪切阿尔芬波相向传播，并在 TAE 间隙处形成束缚态，并由于 TAE 间隙处 $\partial_r\omega_A(r) \simeq 0$，使得剪切阿尔芬波束缚态受到的连续谱阻尼较弱，因而容易被高能量粒子或者外加天线激发。上述对 TAE 的讨论我们只考虑了两个相邻极向模数的耦合，在实际情况中，多个相邻半有理面处的不同 m 的剪切阿尔芬波分量都可以互相耦合，形成径向分布更宽甚至全域的 TAE。

2.2.2.4 托卡马克中的阿尔芬本征模

TAE 和 TAE 连续谱间隙的产生机制主要是由于环向磁场在极向的周期性变化。对于圆截面托卡马克，环向磁场强度反比于大半径，$B_\varphi \propto R^{-1}$，因此剪切阿尔芬波的相速度，

即阿尔芬速度在极向存在一个周期性的变化，进而导致了剪切阿尔芬波出现布拉格反射 (Bragg reflection) 现象。这一现象类似于在光子晶体 (photonic crystals) 或者光纤光栅 (fiber grating) 中由于折射率的周期性变化导致的电磁波相速度的周期性变化，而这一折射率的周期性变化会产生布拉格反射和频率间隙/带隙，间隙对应的频率也就是布拉格频率 (Bragg frequency)，大约为 $f_B \simeq \bar{v}/2\Delta l$，$\bar{v}$ 为波的平均相速度，对于剪切阿尔芬波即为 v_A。类似的效应还有导体中由于晶格排列产生的周期性势场的变化[58]。对于圆截面托卡马克，沿磁力线方向磁场强度变化完整一个周期的长度 Δl 约为 $2\pi q R_0$，因而对应的布拉格频率也就是 TAE 的间隙频率，大约为 $|\omega_{A0}| = 2\pi f_0 \approx v_A/2q_0R_0$。

图2.6 (a) 展示了 JET 托卡马克第 50235 次放电第 64.7s 时刻平衡位型对应的 $n = 5$ 剪切阿尔芬波连续谱，(b) 和 (c) 分别给出了两类 TAE 的模结构，分别是奇 (odd) 对称 TAE 和偶 (even) 对称 TAE[74]。其中 odd TAE 相邻 m 分量的等离子体位移相位相反，并在极向构成二维反气球模结构 (antiballooning) 的 $\delta\phi$ 分布；而 even TAE 相邻 m 分量的等离子体位移相位相同，因此在极向构成二维气球模结构 (ballooning) 的 $\delta\phi$ 分布。此外，even TAE 的频率主要落在 TAE 连续谱间隙下端，而 odd TAE 则存在于 TAE 连续谱间隙上端，且 odd TAE 的存在条件十分苛刻。因此，even TAE 更具有一般性和鲁棒性，实验和模拟中观察到的 TAE 也主要是 even TAE。本论文中所讨论的 TAE 指的都是 even TAE。

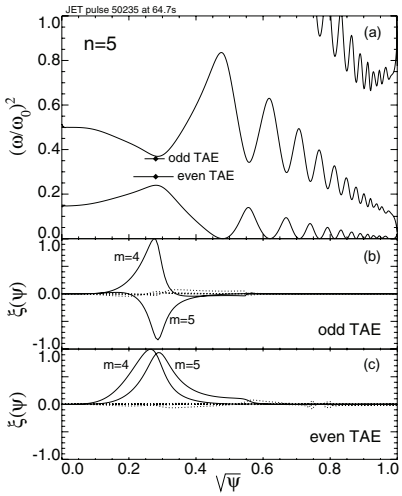

图 2.6　NOVA-K 程序计算得到的 JET 托卡马克第 50235 次放电第 64.7s 时刻的平衡位型下 $n = 5$ 的 (a) 剪切阿尔芬波连续谱和 TAE 的本征频率位置，(b) 奇 (odd) 对称 TAE，和 (c) 偶 (even) 对称 TAE[74]。

托卡马克中由于环效应等因素，磁场在极向的非均匀变化导致剪切阿尔芬波沿磁力线相向传播，除了可以形成 m 和 $m+1$ 耦合的 TAE 外，还可以存在更高阶的不同 m 分量耦合产生的连续谱间隙和相应的阿尔芬本征模。例如由于托卡马克截面的椭圆形变导致磁场强度在极向有两个周期的强弱变化，可以产生椭圆形变阿尔芬本征模 (Ellipticity-induced Alfvén Eigenmode, EAE)[75,76]，EAE 的模结构主要为 m 和 $m+2$ 之间的耦合。类似的，托卡马克的三角形变等非圆截面效应也会导致非圆形变阿尔芬本征模 (Noncircularity-induced

Alfvén Eigenmode, NAE)[75,77] 的产生，NAE 的模结构则由 m 和 $m+3$ 甚至更高的极向分量耦合而成。更复杂的，在托卡马克的三维磁岛或者仿星器中，磁场的环向对称性也被破坏，可以产生由不同 n 以及不同 m 分量之间互相耦合的连续谱间隙和阿尔芬本征模，例如磁岛阿尔芬本征模 (Magnetic-Island-induced Alfvén Eigenmode, MIAE)[78] 和螺旋阿尔芬本征模 (Helicity-induced Alfvén Eigenmode, HAE)[79,80] 等。

另一类阿尔芬本征模则主要由于连续谱局域的极值点 $[\partial_r\omega_A(r)\simeq 0]$ 导致连续谱阻尼减弱或者消失而产生，包括上一节直柱位型下介绍的 GAE 以及 RSAE。其中 GAE 在托卡马克中容易由于环效应导致的极向模数耦合而受到连续谱阻尼被致稳，因此 GAE 一般对托卡马克的运行影响不大[68]。但由于 ITER 等未来聚变示范堆级别的托卡马克往往会运行在 q 反剪切位型下，因此 RSAE 更容易被高能量粒子激发[70,81]。此外，托卡马克中由于等离子体的可压缩性和磁场曲率，剪切阿尔芬波和声波的耦合会导致剪切阿尔芬波连续谱有理面对应的 $\omega|_{q=m/n}=0$ 向上抬升，从而在 TAE 间隙以下低频段 $(\omega<\omega_{TAE})$ 打开一个新的剪切阿尔芬波间隙[82]。在这个间隙内由于连续谱径向梯度接近零，连续谱阻尼弱，从而可以存在剪切阿尔芬波的本征模式，被称作压缩阿尔芬本征模 (Beta-incuded Alfvén Eigenmode, BAE)[83,84]。随着托卡马克等离子体比压的升高，原先不稳定的 TAE 会由于本征频率的下降而最终嵌入连续谱内，并由于连续谱阻尼而被致稳[72]。但在这种较高的等离子体比压参数下，BAE 往往容易被高能量粒子激发，从而对背景等离子体和高能量粒子的约束和能量转移产生影响。

上述不同机制产生的各种剪切阿尔芬波本征模在频率和模结构等特征上都有显著差异，因而构成了著名的 Alfvén wave zoo[58]。表2.1总结了托卡马克以及仿星器等装置中出现的主要几类阿尔芬本征模及其相应的特点和产生机制。

表 2.1 托卡马克以及仿星器等装置中主要存在的不同类型阿尔芬本征模及其特点[58]。

名称缩写	缩写起源	模式特点及产生机制
GAE[85,86]	Global	连续谱频率极小值 ω_{min}
RSAE[87,88]	Reversed-Shear	安全因子极小值 q_{min} 的连续谱极值
BAE[83,84]	Beta-induced	等离子体可压缩性产生的连续谱极值
TAE[89–92]	Toroidicity	磁场强度极向 $m=1$ 的周期性导致 m 和 $m+1$ 的耦合
EAE[75,76]	Ellipticity	磁场强度极向 $m=2$ 的周期性导致 m 和 $m+2$ 的耦合
NAE[75,77]	Noncircularity	磁场强度极向 $m\geq 3$ 的周期性导致 m 和 $m+(\geq)3$ 的耦合
MAE[93]	Mirror	仿星器等磁场强度环向 $n\geq 1$ 的周期性导致不同 n 的耦合
HAE[79,80,93]	Helicity	仿星器等磁场强度极向和环向的周期性导致不同 n, m 的耦合
MIAE[78,94]	Magnetic-Island	托卡马克等装置中磁岛三维磁场导致的剪切阿尔芬波束缚态

2.2.2.5 托卡马克中的高能量粒子模

上述讨论的阿尔芬本征模是托卡马克非均匀磁化等离子体系统中存在的正则模式，这些模式往往落在连续谱极值或者间隙处，受到较弱的连续谱阻尼，因此在托卡马克中容易被较低份额的高能量粒子或者外加天线激发。在这种情况下，高能量粒子的密度往往可以

远小于背景等离子体密度，从而不改变整体的平衡分布，只改变阿尔芬本征模的增长率，而模式的频率则受高能量粒子影响较小，接近理想磁流体求解得到的本征频率。然而，随着托卡马克中高能量粒子份额的增加，特别是当高能量粒子的比压和背景离子可比时，高能量粒子还可以激发起一类新的剪切阿尔芬波不稳定性，即高能量粒子模 (EPM)。EPM 的频率和增长率都强烈依赖于高能量粒子的分布函数，其频率往往和高能量粒子的特征轨道频率相匹配，例如渡越频率、反弹频率和进动频率等[59]。当高能量粒子的驱动足够强，其对剪切阿尔芬波的共振驱动可以克服连续谱共振吸收带来的阻尼效应，从而激发起 EPM。

阿尔芬本征模在本质上仍然是磁流体模式，可以在不考虑或者仅微扰地 (perturbatively) 考虑高能量粒子贡献的情况下，分析其线性色散关系。而对于 EPM，需要非微扰地 (nonperturbatively) 考虑高能量粒子分布函数的贡献。对 EPM 的分析最早由陈骝教授通过捕获粒子环向进动共振激发 $m/n = 1/1$ 的内扭曲模[95] 解释了 PDX 装置上观察到的鱼骨模 (fishbone)[96]，并进一步地在高-n 假设和 $s-\alpha$ 模型下，考虑非微扰高能量粒子贡献下得到了除 TAE 等间隙本征模外的 EPM 的色散关系[59]。在特定的等离子体参数下，由于高能量粒子的强驱动效应，EPM 可能对托卡马克的运行和等离子的约束产生更大的影响。

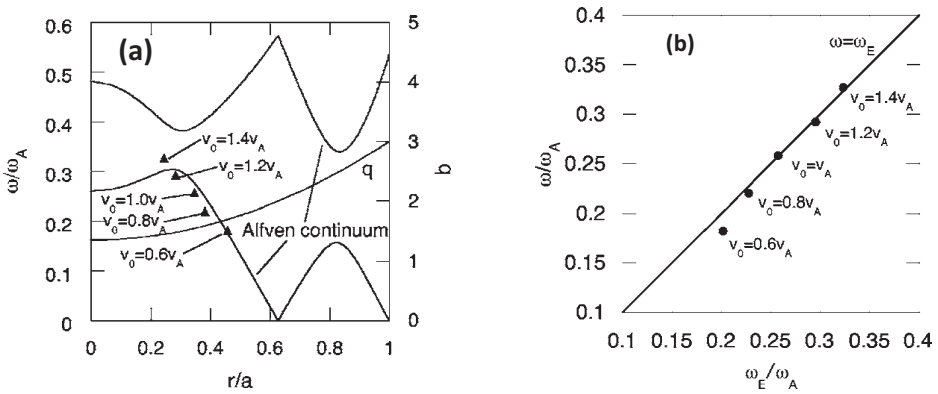

图 2.7　(a) MEGA 程序模拟得到的不同速度 (v_0) 高能量粒子束注入下的 $n = 1$ 剪切阿尔芬波不稳定性频率在连续谱上的分布情况，$v_0 \leq 1.2v_A$ 的情况为 EPM，$v_0 = 1.4v_A$ 的模式对应 TAE；(b) 为与 (a) 对应的不同速度 (v_0) 高能量粒子束注入下，剪切阿尔芬波不稳定性 (主要为 EPM) 的频率 ω 和高能量粒子的轨道频率 ω_E 之间的关系，实线为线性拟合[97]。

数值模拟上，不同程序的线性模拟结果也证实了 EPM 的频率主要由高能量粒子的轨道特征频率决定。对于高-n 的 EPM，Santoroa 等人[98] 研究了在不同背景等离子体压强和不同高能量粒子速度参数下的剪切阿尔芬波不稳定性在 TAE 和 EPM 之间的互相转化。当高能量粒子速度较小时 ($v_h < v_A$)，主要为 EPM，其频率和高能量粒子的速度以及轨道频率成线性关系，而当高能量粒子速度较大时 ($v_h \gtrsim v_A$)，则对应 TAE 主导的区间，模式的频率对高能量粒子的速度变化依赖较弱。对于低-n 的 EPM，Todo 等人[97] 利用 MEGA 程序系统性地研究了束注入情况下，高能量粒子对 $n = 1$ EPM 以及 TAE 的激发。如图2.7所示，当高能量粒子束速度 $v_0 \leq 1.2v_A$ 时，线性模拟得到 EPM 的频率和高能量粒子速度以及轨

道频率线性相关，其模式频率嵌入连续谱内。而当高能量粒子束速度达到 $1.4v_A$ 时，模式频率落在 TAE 间隙内，形成 TAE。这一部分低-n 的 EPM 线性结果和高-n 情况基本一致，也验证了 EPM 主要由高能量粒子的特征轨道频率共振激发产生。

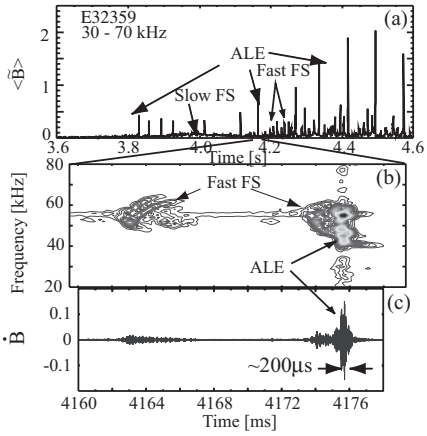

图 2.8 JT-60U 托卡马克负离子中性束 [negative ion based neutral beam (N-NB)] 注入实验中 (第 32359 次放电) 观察到的 (a) 30-70kHz 范围内的模式磁扰动幅值信号；(b) 磁扰动信号的频率谱图；(c) 30-70kHz 范围内的磁扰动信号时间序列。图中的 Fast FS 表示快速扫频 (Fast Frequency-Sweeping) 的 TAE，ALE 表示突然大幅值爆发事件 (Abrust Large-amplitude Event)，即对应 EPM[99]。

托卡马克实验中，剪切阿尔芬波连续谱上激发起的 EPM 在中性束注入过程中经常被发现，其行为主要呈现半周期性的爆发特点。在每一个爆发过程中，由于高能量粒子的分布函数被 EPM 改变，导致了 EPM 的频率快速变化。第一个频率快速变化的剪切阿尔芬波不稳定性在 DIII-D 托卡马克中性束注入实验中被观察到，其频率范围在 TAE 频率附近，但该模式频率的变化范围远大于 TAE 和 BAE 等[37]。此外，如图2.8所示，在 JT-60U 托卡马克的负离子中性束 [negative ion based neutral beam (N-NB)] 注入实验中也同时观察到 TAE 和 EPM 行为[99]。而 HMGC 程序针对 JT-60U 上 N-NB 实验的模拟也发现了在不同阶段出现相应的 TAE 和 EPM。如图2.9所示，在模拟的线性阶段，高能量粒子最先激发起一支 $n = 1$ 的 EPM，其频率落在连续谱内，随后在非线性阶段，在 TAE 间隙内，激发起不同的 TAE[100]。

2.3 高能量粒子对剪切阿尔芬波不稳定性的驱动

在第2.1.1节中，我们初步讨论了托卡马克环对称磁场位型下粒子的运动轨道特性。在托卡马克平衡磁场中，粒子的未扰动轨道呈周期性运动，可以用粒子的磁矩 μ、能量 ε 和环向正则角动量 P_φ 来表述。在低频扰动场 ($\omega \ll \omega_{ci}$) 存在的情况下，粒子的磁矩为守恒量，而环向正则角动量和能量的守恒性则会发生变化。首先，粒子的哈密顿量 (Hamiltonian) 可以写成如下形式：

$$H = \frac{1}{2}Mv_\parallel^2 + \mu B + Ze\Phi. \tag{2.40}$$

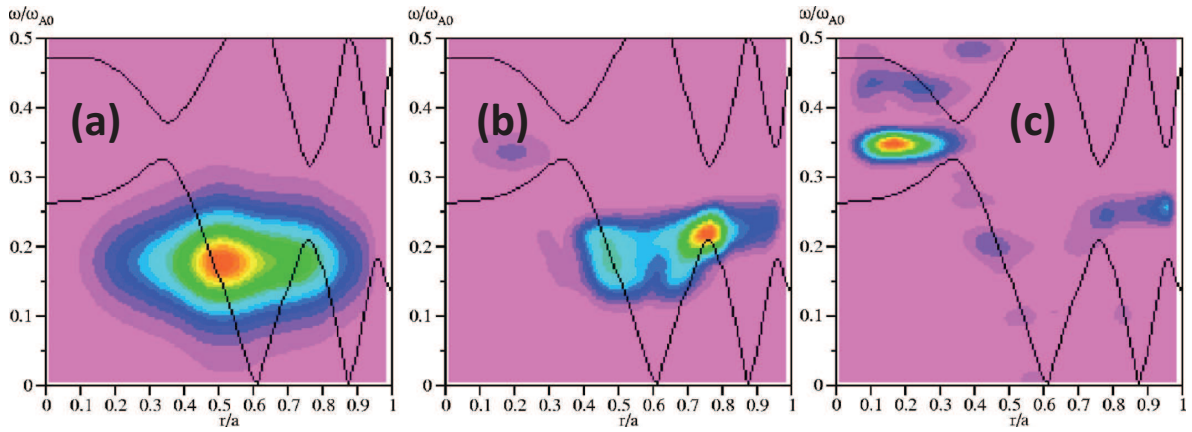

图 2.9　HMGC 程序针对 JT-60U 第 36378 次放电模拟得到的不同阶段 $n=1$ 模式频率和连续谱分布关系。分别为 (a) 线性阶段、(b) 早期和 (c) 后期的饱和阶段[100]。

由于式2.40所给的哈密顿量在平衡场下不显含时，且系统环向对称，可以证明 $dP_\varphi/dt = -\partial H/\partial\varphi = 0$，$d\varepsilon/dt = \partial H/\partial t = 0$，即粒子的 P_φ 和 ε 为守恒量。而在有扰动场的情况下，等离子体位移或者电场等扰动量满足公式2.2的形式。在只考虑环向单模的情况下 (频率为 ω，环向模数为 n)，即：

$$\boldsymbol{\xi}_n = \sum_m \xi_{n,m;j}(r)\,\mathbf{e}_j \exp\left[-i\left(\omega t - n\varphi + m\theta\right)\right]. \tag{2.41}$$

由于该单模产生的系统扰动哈密顿量 δH 也正比于 $\exp\left[-i\left(\omega t - n\varphi\right)\right]$，由此我们可以得到如下关系：

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \delta H}{\partial t} = -i\omega\delta H, \tag{2.42}$$

$$\frac{dP_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \delta H}{\partial \varphi} = -in\delta H. \tag{2.43}$$

因此，根据式2.42和2.43，我们可以找到一个新的守恒量 $\varepsilon' = \varepsilon - \omega P_\varphi/n$，满足：

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon - \frac{\omega}{n}P_\varphi\right) = 0. \tag{2.44}$$

公式2.44表示了粒子在该扰动场系统中的运动保证 ε' 为守恒量[57]。

ε' 的守恒性也意味着在单模不稳定性扰动的影响下，粒子的能量和径向位置的变化互相耦合，满足：

$$\delta\varepsilon = \frac{\omega}{n}P_\varphi \approx -\frac{\omega}{n}Ze\delta\psi. \tag{2.45}$$

可以从公式2.45看到，粒子能量的减小 ($\delta\varepsilon < 0$) 往往对应着粒子径向向外的输运过程 (P_φ 减小和 ψ 增加)。此外，我们也可以初步分析出，对于低频的高模数不稳定性 (低-ω，高-n)，粒子和波的能量交换较弱，而径向的输运较强[57]。但对于高频电磁波 (如电子或离子回旋波)，其频率不再满足公式2.40中的低频假设 ($\omega \ll \omega_{ci}$)，因此为理解其对粒子加热和输运的影响，需要考虑有限拉莫尔轨道效应并结合波-粒子相互作用做更加严谨的讨论和分析。

剪切阿尔芬波等高能量粒子不稳定性的激发需要通过波-粒子共振来提供能量交换机制，也就是反朗道阻尼过程 (inverse Landau damping)[101]。而这一过程中，不稳定性的增长率一般正比于高能量粒子分布函数对能量或速度的梯度，也就是 $\gamma \propto \partial_{\varepsilon(v)} f$[57,71]。而对于托卡马克中一般的粒子分布函数，例如公式1.17所示高能量粒子的慢化分布函数，以及常见的麦克斯韦分布，其能量 (速度) 空间的梯度均为负值，也就是 $\partial_{\varepsilon(v)} f < 0$，而能量空间的负梯度总是对应着波的朗道阻尼。但在托卡马克这样的非均匀等离子体中，由于波和粒子共振产生的粒子分布函数演化满足公式2.44所示的能量和空间位置 (P_φ) 的耦合关系，因此在分析波和粒子共振产生能量交换的同时，必须考虑粒子分布函数在实空间上的非均匀性。同样考虑公式2.41所对应的单模不稳定性，粒子的运动满足 $\varepsilon' = \varepsilon - \omega P_\varphi / n$ 的守恒性，因此我们对粒子分布函数的能量求导时，会额外引入 ∂_{P_φ} 项，即满足[57]：

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon'=\text{constant}} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{n}{\omega}\frac{\partial f}{\partial P_\varphi}. \tag{2.46}$$

公式2.46第二项主要对应分布函数径向的梯度，取近似条件 $P_\varphi \approx -Ze\psi$，则：

$$\frac{n}{\omega}\frac{\partial f}{\partial P_\varphi} \approx -\frac{n}{\omega}\frac{\partial f}{Ze\partial\psi} \approx \frac{n}{\omega}\frac{1}{ZeRB_\theta}\frac{\partial f}{\partial r} \approx \frac{n}{\omega}\frac{q}{ZeBr}\frac{\partial f}{\partial r}, \tag{2.47}$$

其中使用了条件 $B_\theta = -\partial A_\varphi/\partial r$, $\psi = RA_\varphi$ 以及 $q \approx rB/RB_\theta$ 近似。对粒子分布函数引入特征温度的概念 $T = -(\partial \ln f/\partial\varepsilon)^{-1}$，粒子能量空间的分布函数梯度可以表示成 $\partial f/\partial\varepsilon = -f/T$，而粒子的抗磁漂移频率则为 $\omega_* = \frac{qT}{ZerB}\frac{\partial \ln f}{\partial r}$。公式2.46对分布函数能量的梯度可以表示成：

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon'=\text{constant}} = \frac{f}{T}\left(n\frac{\omega_*}{\omega} - 1\right). \tag{2.48}$$

由公式2.48可以看出，当高能量粒子的分布函数径向梯度足够大时 ($n\omega_*/\omega > 1$)，可以使得 $\partial f/\partial\varepsilon|\varepsilon' > 0$，从而通过反朗道阻尼驱动波的增长。对于背景离子和电子，由于其温度较低，其抗磁漂移频率 ω_* 一般远小于波的频率 ω，且背景离子和电子中，始终有一个组份的抗磁漂移频率与高能量粒子的抗磁漂移频率方向相反 (对应更强的朗道阻尼机制[75])，因而公式2.48对于背景离子和电子一般为负，也就是对应波的朗道阻尼，从而粒子可以从波获取能量。

图2.10展示了托卡马克中同向、反向通行和捕获粒子在二维相空间 $\{P_\varphi, \varepsilon\}$ 的分布[57]。图2.10 (a) 和 (b) 的白色实线表示 ε' 为常数，图 (c) 分别展示了沿着 (a) 和 (b) 中 ε' 为常数的实线粒子分布函数的变化。可以看到，由于粒子径向分布的不均匀性，在 ε' 守恒的条件下，粒子更多地分布在高能量 (芯部) 区间，而低能段 (边界) 的粒子分布则较少。也对应波和粒子共振范围内，损失能量的粒子多于得到能量的粒子，粒子整体的输运方向对应从芯部向外，从而对波起到驱动增长的作用。此外，从图2.10 (c) 也可以看到，从芯部到边界，反向通行粒子的能量损失远少于同向通行粒子，因而反向通行粒子往往更容易由于不

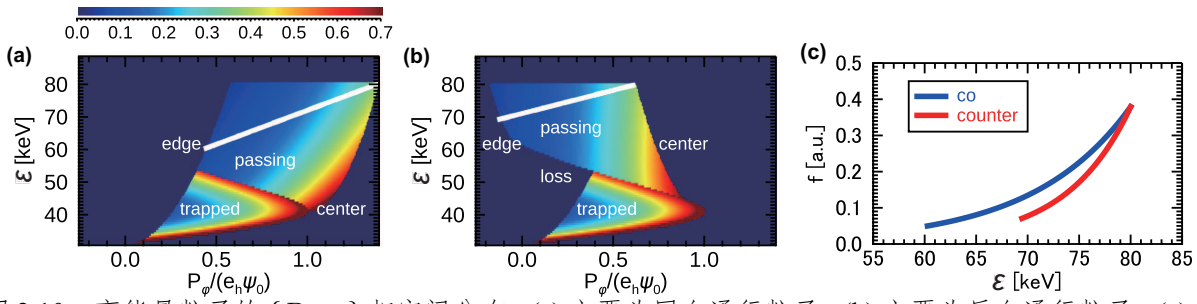

图 2.10　高能量粒子的 $\{P_\varphi, \varepsilon\}$ 相空间分布：(a) 主要为同向通行粒子；(b) 主要为反向通行粒子。(a) 和 (b) 中的白色实线表示 $\varepsilon' = \text{constant}$；(c) 为沿着 $\varepsilon' = \text{constant}$ 的实线，从等离子体边界到芯部同向和反向通行粒子的分布函数变化 (低能段靠近边界，高能段靠近芯部)。对应参数：托卡马克大半径为 1.8m，小半径为 0.6m，磁场强度为 2T，磁轴/边界的安全因子为 1.1/3.0，高能量粒子满足慢化分布，截止能量为 80keV，临界能量为 30keV，白色实线对应的波 $n = 4$，频率为 70kHz[57]。

稳定性产生损失。从 (b) 图也可以看到，反向通行粒子在损失能量和径向向外输运的过程中，更容易进入相空间左下角的损失区间，这也进一步增强了反向通行粒子的损失程度。

托卡马克中，除了上述高能量粒子分布函数在实空间的不均匀性可以对波起到激发作用，当高能量粒子分布函数在速度空间存在各向异性时，例如对粒子投掷角 Λ 存在依赖性的情况下，可以由速度空间的非均匀性共振激发不稳定性[57]。典型的例子如由各向异性高能量粒子激发的 $n = 0$ 的高能量粒子测地声模 (Energetic particle-induced Geodesic Acoustic Mode, EGAM)[102]。

这一节我们主要讨论了高能量粒子分布函数在能量 (速度) 之外的非均匀性对波和不稳定性的驱动，也就是反朗道阻尼机制。而对于托卡马克中具体的剪切阿尔芬波不稳定性，我们还需要考虑第2.1.2节所讨论的波和粒子的共振条件。例如根据第2.1.2节的估算，对于通行粒子激发的 TAE，其共振高能量粒子的平行速度主要为 $v_\parallel = v_A$ 和 $v_\parallel = v_A/3$。只有满足公式2.7所对应的波和粒子共振条件附近的高能量粒子在实空间 (或者投掷角等) 分布函数非均匀性导致的驱动，大于其分布函数在能量 (速度) 方向上非均匀性产生的朗道阻尼 (以及背景等离子体带来的朗道阻尼)[75]、连续谱阻尼 (例如阿尔芬本征模的部分模结构接触到连续谱)[103]、辐射阻尼[104] 和碰撞阻尼 (捕获电子)[105] 等，才有可能激发起相应频率的不稳定性。

2.4　剪切阿尔芬波不稳定性的非线性饱和机制

上一节，我们主要讨论了剪切阿尔芬波的线性不稳定性，对于给定的高能量粒子分布函数和背景等离子体参数，通过本征值程序 NOVA-K[106] 等可以快速计算得到相应的不稳定性的线性增长率和本征频率等。然而，在实际实验过程中，背景等离子体和高能量粒子的约束性能主要受剪切阿尔芬波不稳定性的非线性饱和幅值影响，因此需要借助非线性的理论模型和模拟程序研究剪切阿尔芬波不稳定性的非线性饱和机制，从而估算其非线性饱和幅值。根据现有的理论和模拟研究工作，剪切阿尔芬波不稳定性的非线性饱和机制主要

分为两类，分别为波和粒子相空间的非线性相互作用[107]，以及波与波之间的非线性相互作用[108]。

2.4.1 波-粒子非线性相互作用

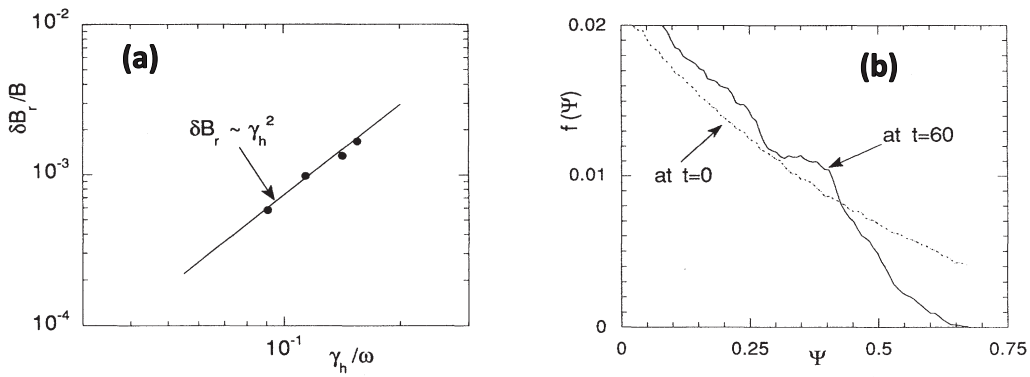

图 2.11 M3D-K 程序模拟 $n=1$ TAE 的结果。(a) TAE 饱和幅值 $\delta B_r/B$ 和线性增长率的依赖关系；(b) 初始时刻和非线性阶段高能量粒子分布函数和极向磁通依赖关系[107]。

对于上述第一种波和粒子相空间的非线性相互作用导致的剪切阿尔芬波不稳定性饱和，我们主要可以分两种情况讨论。第一种为不考虑源 (source) 和汇 (sink) 的情况 (也不包含碰撞效应)[70,107,109]，由于共振粒子被波捕获后[110]，粒子在波的势井内做反弹 (bounce) 运动，在大于反弹周期的时间尺度上，也就是当波的线性增长率 (阻尼率) 和粒子的反弹频率可比时 [$\gamma_{L(d)} \sim \omega_b$]，粒子不再和波产生能量交换。而不同能量的粒子被波捕获后由于其反弹频率的差异，会产生相空间的相混，从而导致分布函数的平化，最终使得这一 (反) 朗道阻尼过程达到饱和。粒子被波捕获的反弹频率正比于波幅度的平方根，因此可以证明在波和粒子非线性效应为主要饱和机制的情况下，波的饱和幅度正比于其线性增长率的二次方[63,107]。如图2.11所示，高能量粒子激发 TAE 的非线性模拟中，TAE 的饱和幅值和其线性增长率成二次方关系。此外，在非线性阶段，也观察到了分布函数在共振区域的平化现象，说明波和高能量粒子相空间的非线性相互作用是导致该模拟过程中 TAE 饱和的主要机制。

第二种情况为考虑源和汇，以及碰撞效应时，TAE 等剪切阿尔芬波不稳定性的非线性演化过程[109,111–114]，其中源主要表示高能量粒子的产生，包括 3.52MeV α 粒子和外加辅助加热等，而汇和库伦碰撞效应则主要表示粒子慢化 (drag)、湮灭 (annihilation，如电荷交换等) 和分布函数的弛豫过程 (pitch-angle diffusion/scattering)。对于考虑源和不同耗散效应下波的非线性饱和过程，Berk 和 Breizman 等人在 1990 年开始的一系列工作中做了较为全面的讨论，构建了著名的 Berk-Breizman 模型，也称 BB 模型，主要包括：i. 粒子速度空间尾隆分布 (bump-on-tail) 的一维问题中，考虑湮灭和慢化情况下离散模式的饱和幅值[111]；ii. 分布函数空间不均匀性激发的静电波在不同碰撞率区间 (包括慢化和弛豫机制) 的饱和幅值[112]；iii. 环位型磁场中，考虑慢化和弛豫效应，α 粒子密度梯度激发的 TAE 的

饱和幅值[113]。在不考虑高能量粒子源和汇以及碰撞效应的情况下，由于共振区域分布函数变平导致波达到饱和，此时，波的饱和幅值正比于线性增长率的平方。而在考虑源和汇以及碰撞效应的 BB 模型中，波的饱和幅值主要取决于分布函数非均匀性导致的驱动率和系统阻尼率之间的平衡。例如存在源项和弱弛豫率 ($\nu/\omega_b \ll 1$)，且阻尼率远小于增长率 ($\gamma_d \ll \gamma_L$) 的情况下，当分布函数在速度空间仍存在有限梯度时，分布函数剩余梯度和系统阻尼的平衡，导致波可以达到稳态饱和。如图2.12 (a)-(b) 所示，在低阻尼率 (γ_d) 和弛豫率 (ν) 的情况下 (初始无高能量粒子，但存在源项)，数值模拟得到波的非线性稳态饱和解 ($\nu > \gamma_d$)[115]，见图2.12 (a)，而非线性饱和阶段在共振速度附近，粒子分布函数有一定程度变平，但仍保持了有限大小的梯度，如图2.12 (b) 所示。在此基础上，BB 模型还考虑了临界不稳定的情况，也就是阻尼率 γ_d 和驱动增长率 γ_L 可比 ($\gamma = \gamma_L - \gamma_d \ll \gamma_L$)，并假定波的幅度较小 ($\omega_B \ll \gamma$)，通过对包含源和汇的动理学方程逐级展开得到波振幅的演化方程。在不同的湮灭率 ν 下求解得到波的不同演化趋势，主要包括稳态解 (steady)、周期性解 (periodic/pulsant)、混沌解 (chaotic) 和爆发性解 (explosive)[116]。如图2.12 (c)-(g) 所示，在归一化湮灭率 [$\hat{\nu} = \nu/(\gamma_L - \gamma_d)$] 大于临界值 4.38 的情况下，可以得到如图 (c) 所示的类似上述弱阻尼情况下的稳态解；当湮灭率较低时 ($2.5 \sim 4.3$)，可以得到如图 (d)-(f) 所示周期性和混沌振荡解；当湮灭率进一步降低时 ($\hat{\nu} \lesssim 2.5$)，则可以得到如图 (g) 所示的爆发性解 (该爆发性解不再满足模型预先的波幅度较小假定)。

BB 模型的另一个重要贡献是发现了相空间分布函数的 hole-clump 对 (pair) 结构的产生以及相应的扫频现象[117]。一般情况下，阿尔芬本征模等不稳定性在高能量粒子驱动达到饱和以后，往往会由于系统的阻尼机制导致波幅度的快速单调下降。而 Berk 和 Breizman 等人发现在阻尼率 γ_d 和驱动增长率 γ_L 接近的临界不稳定情况下，对于图2.12 (g) 所示的爆发性增长解 (低碰撞率条件)，相空间粒子分布函数可以自恰形成如图2.13所示的 hole-clump 对结构。随着时间演化，hole 和 clump 分别向速度大和速度小的方向移动，hole-clump 对在上下方向的移动对应了波频率的上下分叉和扫频 (chirping) 行为 (hole 和 clump 分别对应向上和向下扫频)，同时粒子不断提供自由能使得波的饱和幅度可以达到一定的稳态。该模型所预测的阿尔芬本征模的扫频行为也在许多托卡马克实验中被观察到，例如 JT-60U[118], NSTX[119], MAST[120] 等。图2.14展示了 MAST 托卡马克实验中观察到的不同模式扫频行为，包括频率处于准稳态的 TAE、向上或向下单方向扫频的模式，以及上下对称扫频 (对应 hole-clump 对的上下移动) 的 TAE 和 EAE[120]。

2.4.2 波-波非线性相互作用

除了波与粒子相空间非线性导致的饱和机制外，波与波之间的非线性耦合对剪切阿尔芬波不稳定性的最终饱和幅度也有同等重要的影响。我们以 TAE 为范例，简要讨论波-波非线性在其饱和过程中起到的作用。在 Todo 等人早期的模拟工作中，程序没有考虑 TAE 模结构的自洽演化和模式的非线性耦合 (波-波非线性)，而只考虑了高能量粒子轨道和分

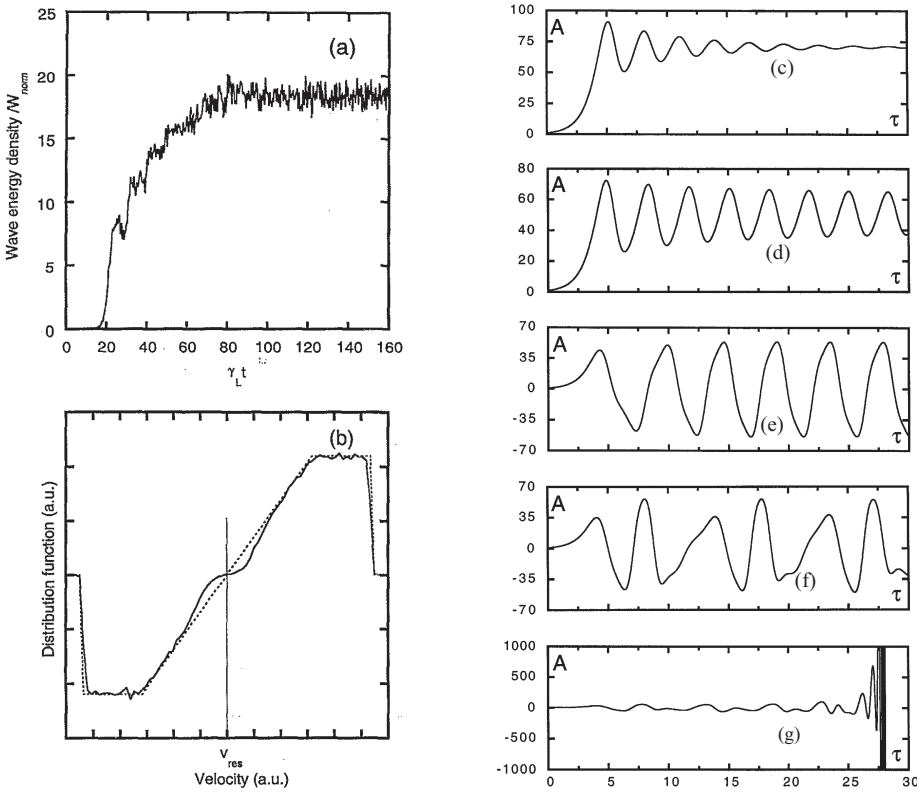

图 2.12 左图为阻尼率远小于驱动增长率 ($\gamma_d \ll \gamma_L$) 情况下模拟得到的 (a) 波的能量密度随时间演化，波的幅值饱和后达到稳态解；(b) 速度空间的高能量粒子分布函数，实线为波饱和阶段，虚线对应未扰动分布函数，垂直竖线表示共振速度 v_{res}；模拟过程初始无高能量粒子，但存在高能量粒子源项，采用的归一化阻尼率和弛豫率分别为 $\gamma_d/\gamma_L = 0.031$ 和 $\nu/\gamma_L = 0.035$[115]。右图为临界不稳定的情况下 ($\gamma_L - \gamma_d \ll \gamma_L$)，不同湮灭率下数值求解得到的波幅度 (A) 随时间演化，其归一化湮灭率 $[\hat{\nu} = \nu/(\gamma_L - \gamma_d)]$ 分别为 (c) $\hat{\nu} = 5.0$，(d) $\hat{\nu} = 4.3$，(e) $\hat{\nu} = 3.0$，(f) $\hat{\nu} = 2.5$，(g) $\hat{\nu} = 2.4$[116]。

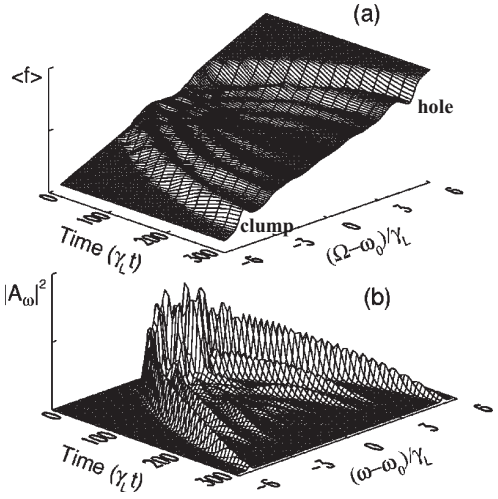

图 2.13 (a) 相空间分布函数 hole-clump 对的产生以及其随时间在不同共振频率范围 $[(\Omega - \omega_0)/\gamma_L]$ 的演化，ω_0 为波的线性频率，$\Omega = kv$ 对应尾隆分布粒子不同速度的共振频率；(b) 为对应的波功率谱强度 ($|A_\omega|^2$) 随时间在不同频率范围内 $[(\omega - \omega_0)/\gamma_L]$ 的演化[117]。

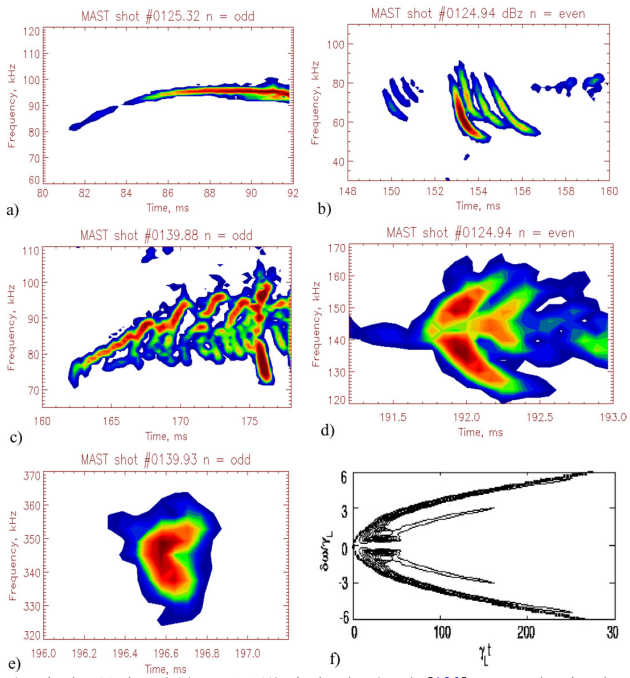

图 2.14　MAST 托卡马克实验中观察到的不同模式扫频行为[120]：(a) 频率处于准稳态的 TAE；(b) 向下扫频模式；(c) 向上扫频模式；(d) hole-clump 对的产生导致的上下对称扫频 TAE；(e) hole-clump 对的产生导致的上下对称扫频 EAE；(f) 理论预测的 hole-clump 对导致的上下扫频行为[117]。

布函数的非线性 (波-粒子非线性)。因此，对 TFTR 装置的中性束注入激发 TAE 的实验开展的模拟中，得到 TAE 的饱和幅值大约为 $\delta B/B \sim 2\times10^{-2}$[121]，远远大于根据实验诊断数据推算出来的磁场扰动强度 ($\delta B/B \sim 10^{-3}$)[122]。

随后，Todo 等人使用 MEGA 混合模拟程序同时考虑了高能量粒子和磁流体的非线性效应，更自洽地模拟了 $n=4$ TAE 的非线性饱和过程。发现在包含磁流体非线性的情况下，如图2.15 (a) 所示，模拟得到的 TAE 的饱和幅值可以下降到原来的一半 (不考虑磁流体非线性的情况)。而这一过程中，如图2.15 (b) 所示，由磁流体非线性耦合产生的 $n=0$ 和 $n=8$ 等边带模 (sidebands) 对 TAE 主模产生更强的阻尼耗散机制，最终使得 TAE 的饱和幅值相比于只考虑波-粒子非线性的情况有非常明显的减弱。如图2.15 (d) 所示，TAE 的非线性模拟中，在 TAE 线性增长阶段观察到增长率为 TAE 主模两倍的 $n=0$ 分量的快速增长，即 $\gamma_{n=0}=2\gamma_{TAE}$。而 TAE 非线性耦合产生的 $n=0$ 带状流分量包含两部分，如图2.15 (d) 所示，一部分为零频带状流 (zero frequency zonal flow) 分量 ($\omega_{n=0}=0$)，另一部分为频率接近磁流体测地声模 (Geodesic Acoustic Mode, GAM) 频率的分量 $[\omega_{n=0}\approx\omega_{GAM}=\omega_A\sqrt{\Gamma\beta_b(1+1/2q^2)}]$[123]。而 $n=8$ 分量的频率主要为 TAE 频率的两倍，即 $\omega_{n=8}=2\omega_{TAE}$，因此其频率嵌入了 $n=8$ 的连续谱内，如图2.16所示，导致 TAE 的边带模受到强烈的连续谱阻尼，进而降低 TAE 的非线性饱和幅值[124]。上述两倍 TAE 增长率的 $n=0$ 分量的产生也在 GTC 程序的非线性模拟中被观察到[125]。仇志勇教授等人则通过非线性回旋动理学理论解析讨论和证明了 TAE 线性增长阶段的 $n=0$ 带状流分

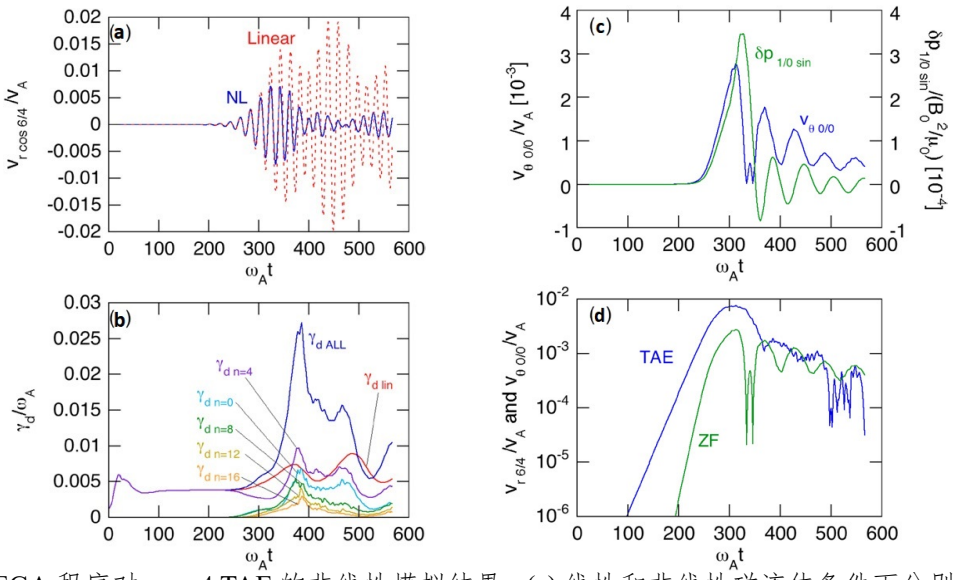

图 2.15 MEGA 程序对 $n=4$ TAE 的非线性模拟结果。(a) 线性和非线性磁流体条件下分别模拟得到的 $n=4$ TAE 的速度扰动随时间演化；(b) 线性和非线性磁流体模拟中不同 n 分量的阻尼率随时间演化；(c) 非线性模拟中 $n=0$ 分量随时间演化，包括 $m/n=0/0$ 的带状流分量和 $m/n=1/0$ 的压强扰动分量；(d) 非线性模拟中 $n=4$ TAE 和 $n=0$ 带状流分量的速度扰动幅值随时间演化[123]。

量的产生机制[126]，主要是由于共振高能量粒子的非线性效应导致了该带状流的受迫激发 (forced driven)。在 TAE 的线性增长阶段，$n=0$ 的增长率等于 TAE 线性增长率的两倍，当 TAE 趋于饱和，$\gamma_{TAE}\to 0$，$n=0$ 的带状流增长率减缓，由指数增长逐渐变为代数增长直至饱和。且如图2.15 (b) 所示，这一受迫激发产生 $n=0$ 带状流分量的过程是无阈值的，增长到一定强度的带状流进而可以调制和影响 TAE 的非线性饱和水平。

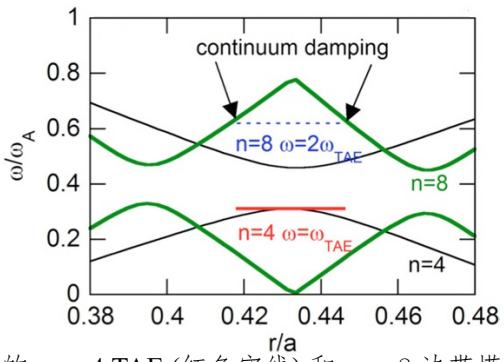

图 2.16 MEGA 程序模拟得到的 $n=4$ TAE (红色实线) 和 $n=8$ 边带模 (蓝色虚线) 的频率和模结构分布范围，黑色和绿色实线分别表示 $n=4$ 和 8 的剪切阿尔芬波连续谱[124]。

除了上述单支 TAE 通过自身非线性过程耦合产生 $n=0$ 和高-n 的边带模来影响 TAE 的非线性饱和水平外，由 TAE 和其他频率/模数的波通过参量衰变过程 (parametric decay process)[127,128] 和调制不稳定性过程 (modulational instability)[81,108] 可以产生新的波和能量耗散/转移通道，从而显著影响 TAE 的非线性饱和幅值。

参量衰变过程往往涉及三支波或者不稳定性，并互相满足波数和频率匹配条件。例

如，T. S. Hahm 和陈骝教授讨论了高-n 的泵浦 TAE 由于背景离子的非线性朗道阻尼 (离子康普顿散射，ion Compton scattering) 产生低频的离子声波 (类离子声波的密度扰动，sound-wave-like density fluctuation) 和频率更接近连续谱的次级 TAE 的过程[127]。其中低频的离子声波可以和背景离子的平行运动共振，从而受到强烈的朗道阻尼，因此可以加热背景等离子体。而次级的 TAE 由于其频率相比于泵浦 TAE 更低，从而更接近 TAE 间隙的下积累点 (accumulation point)，因此会受到更强的连续谱阻尼，从而促进 TAE 的非线性饱和过程。

调制不稳定性过程则涉及四波系统的非线性相互作用，并由于需要克服频率失配带来的阻尼，往往要求泵浦波强度达到一定的阈值。例如陈骝教授等人在不考虑高能量粒子的情况下，分析了泵浦 TAE 通过调制不稳定性自发 (spontaneous) 激发 $n=0$ 的带状流和带状电流 (zonal current) 的非线性物理过程，并给出了调制不稳定发生的阈值条件，以及带状流和带状电流分别占据主导地位的参数区间[108]。当 TAE 幅值超过阈值之后，调制不稳定性自发产生 $n=0$ 分量的增长率正比于泵浦 TAE 的幅值，即 $\gamma_{n=0} \propto |\delta B_r/B|$，而该调制不稳定性产生的带状流分量则可以反过来进一步影响和调制 TAE 的模结构及其最终的饱和幅值。

目前已深入研究的 $n=0$ 分量影响 TAE 的非线性饱和的物理机制主要有两种途径，包括上述带状流 (电流) 分量的受迫激发和调制不稳定性自发产生。前者主要发生在 TAE 的线性增长阶段，而后者由于阈值条件的要求，往往发生在 TAE 的非线性饱和阶段。第一阶段的 $n=0$ 对 TAE 饱和幅值的抑制一定程度上有可能阻碍第二阶段调制不稳定性的发生。因而准确的分析 TAE 的最终饱和水平需要同时考虑这两个非线性过程以及上一节所讨论的波和粒子的非线性物理。在模拟中，TAE 等剪切阿尔芬波受迫激发产生 $n=0$ 分量的现象已十分普遍，而剪切阿尔芬波不稳定性自发产生 $n=0$ 带状流和带状电流的过程仍未在数值模拟中被明确观察到。这可能是由于现有的磁流体混合模拟程序未能准确包含关键的物理效应，例如动理学背景离子处理和有限拉莫尔轨道效应等。但类似的调制不稳定性产生带状流的非线性过程在漂移波不稳定性的模拟中已得到验证，例如在 GTC 程序对离子温度梯度模 (Ion Temperature Gradient mode, ITG) 的模拟中，得到了 ITG 自发激发 $n=0$ 带状流的非线性结果。如图2.17所示，$n=0$ 带状流指数增长阶段的增长率线性正比于 ITG 的幅值，与理论预测的结果一致[129]。

尽管本节内容主要讨论的是波-波非线性相互作用对 TAE 非线性饱和的影响，但由于不同剪切阿尔芬波不稳定性之间的相似性和差异性，上述相关的模拟和理论也可以被推广到其他剪切阿尔芬波不稳定性，用于理解其相应的非线性饱和机制，包括：BAE 非线性产生带状流和带状电流及其对 BAE 本身饱和幅值的影响[130]，以及 BAE[131]、eBAE (e 表示由电子激发)[132] 和 RSAE[81,133] 等通过参量衰变或者调制不稳定性等机制产生 $n=0$ 带状流和 GAM 的非线性过程。

此外，上述模拟或者理论工作往往只考虑了一个主导的剪切阿尔芬波不稳定性，而在

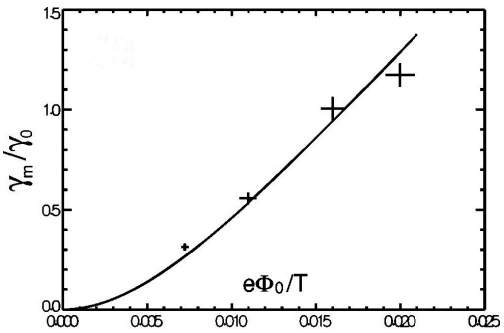

图 2.17 ITG 通过调制不稳定性自发产生的 $n=0$ 带状流分量在指数增长阶段的增长率 (纵轴) 和 ITG 幅值 (横轴) 的关系，十字 (+) 表示 GTC 程序的模拟结果，实线为理论预测结果[129]。

实际的托卡马克中，由于高能量粒子分布函数在能量和实空间上的展宽，会存在多支 AE 或者 EPM 被同时或者先后激发的情况。这些不同频率和波数的剪切阿尔芬波不稳定性之间也往往存在着非常强烈非线性耦合过程[134]，而这些非线性耦合过程反过来又会极大程度地影响剪切阿尔芬波不稳定性的非线性饱和幅值以及粒子分布函数的演化。因此在数值模拟中，若要准确计算剪切阿尔芬波不稳定性的饱和幅值，需要尽可能多的同时考虑多个剪切阿尔芬波不稳定性，并准确的包括波-粒子的非线性 (以及源和汇等) 和波-波之间的非线性效应。然而，现有的数值模拟程序往往在处理波-粒子和波-波的非线性物理中仍有许多缺陷，而同时考虑多模的长时间非线性模拟也往往受到数值计算量大、程序稳定性和可靠性无法保证等因素的限制。因此，在关于剪切阿尔芬波物理的非线性数值模拟研究中，仍有许多难点和瓶颈需要解决。

2.5 高能量粒子和剪切阿尔芬波的实验研究

2.5.1 早期实验研究

对于托卡马克中高能量粒子和剪切阿尔芬波的理论研究在上世纪 80 年代末已取得巨大进展。而对剪切阿尔芬波不稳定性，特别是阿尔芬本征模的实验研究则主要开始于上世纪 90 年代初对 TAE 的一系列深入研究。TFTR 和 DIII-D 托卡马克最早通过中性束注入来激发 TAE 并做相关实验研究。在 1990 年的 TFTR 和 DIII-D 的氘等离子体放电中，当中性束注入速度和阿尔芬速度可比时，成功观察到了高能量粒子激发 TAE 的过程[91,92]。实验发现的 TAE 激发阈值远高于原有的理论预测[71]，这一结果也推动了解析理论和数值模拟对 TAE 的激发和阻尼机制的进一步研究。DIII-D 装置中 TAE 的爆发过程伴随着大量的中性束能量的损失，如图2.18所示，在有 TAE 活动的放电过程中，由 TAE 造成的中性束注入能量损失最高可以达到 70%。特别是在较高的高能量粒子比压参数下，TAE 对托卡马克高能量粒子约束的破坏更加明显[135]。随后在 TFTR 托卡马克中，也观察到离子回旋共振加热导致的捕获高能量粒子对 TAE 的激发[136]。在 JET 托卡马克 90 年代中期的实验中，Fasoli 等人则通过使用外加天线成功地激发了 TAE，并得到 TAE 的阻尼率范围[137]。在随

后 TFTR 的氘氚等离子体实验中，如图2.19所示，当中性束注入关闭 100 ∼ 200ms 之后，形成弱剪切安全因子分布，在中心安全因子大于 1 的情况下，由聚变反应产生的 α 粒子慢化到 v_A 以下 [对应图2.19 (b) 中 $\beta_\alpha(0)$ 的下降阶段]，随后成功激发了 $n = 2 \sim 4$ 的 TAE[138]。该 α 粒子激发 TAE 的实验结果也验证了傅国勇教授等人相关理论计算的准确性[139]。

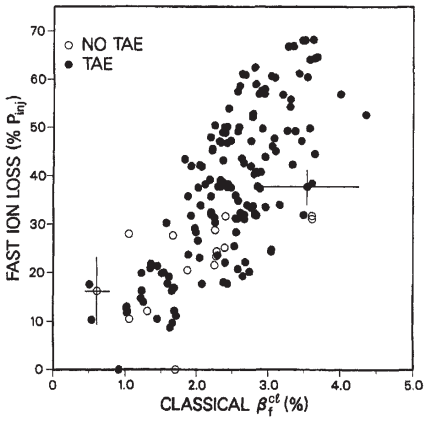

图 2.18　DIII-D 托卡马克中，高能量粒子的损失率和估算的经典高能量粒子比压的关系，空心圆 (○) 表示没有 TAE 产生的放电，实心圆 (●) 表示存在 TAE 的放电[135]。

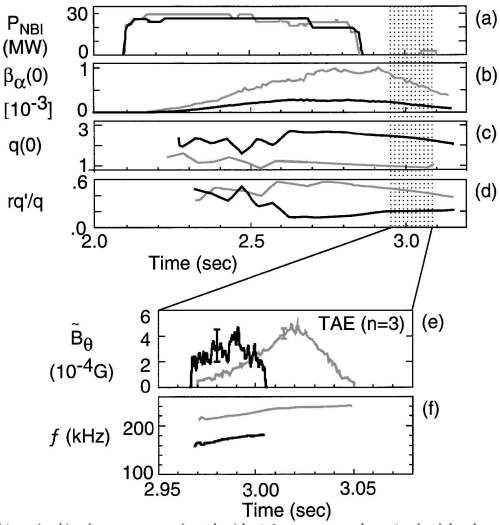

图 2.19　TFTR 托卡马克中 α 粒子激发 TAE 实验结果：(a) 表示中性束注入功率；(b) 表示中心 α 粒子的比压；(c) 表示中心安全因子；(d) 表示 $r/a = 0.3$ 位置的磁剪切；(e) 表示 TAE 产生的外部磁扰动信号；(f) 表示 TAE 的频率。黑色 (灰色) 实线对应的等离子体放电参数在 TAE 幅值最大时刻为：大半径 $R = 260\text{cm}\,(252\text{cm})$，等离子体电流 $I_p = 1.6\,(2.0)\,\text{MA}$，环向磁场 $B_T = 5.3\,(5.1)\,\text{T}$，等离子体密度 $n_{e(0)} = 3.3\,(4.0) \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$，离子温度 $T_{i(0)} = 11(15)\text{keV}$，电子温度 $T_{e(0)} = 5.4(6.0)\text{keV}$[138]。

除了 TAE 以外，多个实验装置中也观察到其他形式的阿尔芬本征模和高能量粒子模。例如在 JT-60U 装置上，在 ICRH 和中性束共同加热的等离子体中，同时观察到了高能量粒子激发的 TAE、EAE 和 NAE[77]。托卡马克中随着等离子体比压的升高，TAE 频率会逐渐下降直至嵌入连续谱内被致稳[72]，同时等离子体可压缩效应对剪切阿尔芬波的响应则会在

连续谱底部打开新的 BAE 间隙。在 DIII-D 托卡马克的高-β_N 实验中，也观察到了由中性束高能量粒子激发的 BAE，其频率低于 TAE 频率的一半，并落在理论计算的 BAE 间隙内[84]。在 JT-60U 和 JET 托卡马克中先后观察到了剪切阿尔芬波从低频 ($\lesssim$ 40kHz) 到 TAE 频率范围 ($\gtrsim$ 100kHz) 的向上快速扫频级联 (cascade) 过程[88,140]，并被证明是由于安全因子的反剪切分布在 q_{min} 处形成了连续谱极值点，从而由高能量粒子共振激发产生 RSAE[87,141]。RSAE 频率的快速级联过程则主要是由于安全因子极小值 q_{min} 随时间在 $q_{min} \sim m/n$ 附近的缓慢改变导致 $k_{\|} = (n - m/q_{min})/R$ 剧烈变化[70]。在 DIII-D 和 JT-60U 等托卡马克中观察到高能量粒子强驱动下克服连续谱阻尼后剪切阿尔芬波在连续谱上的受迫振荡，也就是 EPM 不稳定性[37,99]。在 W7AS 仿星器中，则观察到了在中性束注入下由通行高能量粒子激发的 GAE[142]。

2.5.2 近期非线性物理实验研究

上面的内容简要回顾了上世纪 90 年代以来在 TFTR、DIII-D、JT-60U 和 JET 等托卡马克中关于高能量粒子和剪切阿尔芬波实验的一系列开创性工作，包括各种剪切阿尔芬波不稳定性的发现，以及对激发和阻尼机制的探究，相关的实验结果或检验了理论模拟的预测，亦或促进了理论模拟的进一步发展。而随着托卡马克实验诊断和加热技术，以及相关理论和模拟研究的快速发展，更多丰富的同高能量粒子和剪切阿尔芬波不稳定性相关的实验现象得以在众多的装置中被发现。例如不同剪切阿尔芬波之间的非线性波-粒子和波-波相互作用，以及高能量粒子、剪切阿尔芬波和磁流体不稳定性的非线性相互作用过程等。

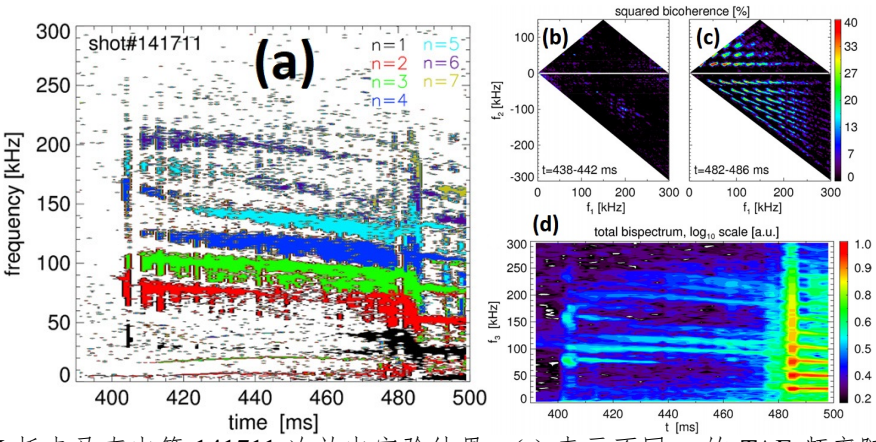

图 2.20 NSTX 托卡马克中第 141711 次放电实验结果：(a) 表示不同 n 的 TAE 频率随时间演化，在 480ms 之后，所有 n 的 TAE 频率快速向下扫频，同时对应着幅值的爆发，产生 TAE 雪崩事件；(b) 和 (c) 分别表示 TAE 雪崩之前和雪崩期间的双相干谱 (squared bicoherence)；(d) 图为归一化后总相干谱 (total bispectrum) 随时间的变化[143]。

例如在 NSTX 托卡马克中，M. Podestà 等人观察到了由于多模非线性耦合造成的 TAE 雪崩事件，主要现象为 TAE 幅值的周期性爆发、频率的快速向下扫频 ($\Delta f > 10$kHz) 以及高能量粒子的明显损失 ($\sim 30\%$)[143]。如图2.20 (a) 所示，NSTX 装置第 141711 次放电

中，480ms 之前同时存在 n 从 1 到 7 的多支 TAE ($n = 3 \sim 4$ 为主要的模式)，其频率基本稳定，呈现缓慢向下扫频现象[143]。而在 480ms 之后，所有分量的 TAE 都快速向下扫频，发生雪崩事件。同时可以从右图的双谱分析中看到，在 TAE 雪崩事件发生之前，如图 (b) 所示，不同频率的模式之间耦合非常弱。图 (c) 对应的 TAE 雪崩期间，TAE 和其他低频 ($f < 60$kHz) 以及高频 ($f > 160$kHz) 的模式之间发生强烈的非线性耦合过程，双向相干系数达到 $\sim 40\%$，而图 (d) 所示的归一化的总相干谱随时间的演化也和 TAE 雪崩事件的发生相对应。该实验也发现足够强的高能量粒子驱动以及 TAE 与 $n = 1$ 的低频种子不稳定性的耦合对 TAE 雪崩的发生有十分重要的作用。朱霄龙博士等人使用 M3D-K 程序进行了较为自洽的非线性多模模拟，较好地重复了 NSTX 上的 TAE 雪崩事件[134]。此处涉及的双谱分析 (bispectral analysis)[144] 在实验上被广泛使用以分析不同波的非线性耦合过程。双相干系数 (squared bicoherence) 定义为 $\hat{b}^2(f_1, f_2; f_3) = \frac{\left|\langle x_1(f_1)x_2(f_2)x_3^*(f_3)\rangle\right|^2}{\langle|x_1(f_1)x_2(f_2)|^2\rangle\langle|x_3(f_3)|^2\rangle}$，$\hat{b}^2(f_1, f_2; f_3)$ 的取值范围为 0 到 100%，其中 $f_3 = f_1 \pm f_2$，$\langle ... \rangle$ 表示系综平均，$x_i(f_i)$ 表示信号的频域傅里叶变换形式，‘$*$’ 表示共轭。总相干谱 (total bispectrum) 则是将对 f_3 有贡献的所有 $\hat{b}(f_1, f_2; f_3)$ 求和得到。双谱分析通过对复傅立叶双谱的相位加权平均来量化频率为 f_1、f_2 和 f_3 三支波之间的相关程度，由于该方法对频谱振幅做了归一化，因此计算结果与实际波幅无关，可以揭示振幅非常弱的波之间的耦合关系。

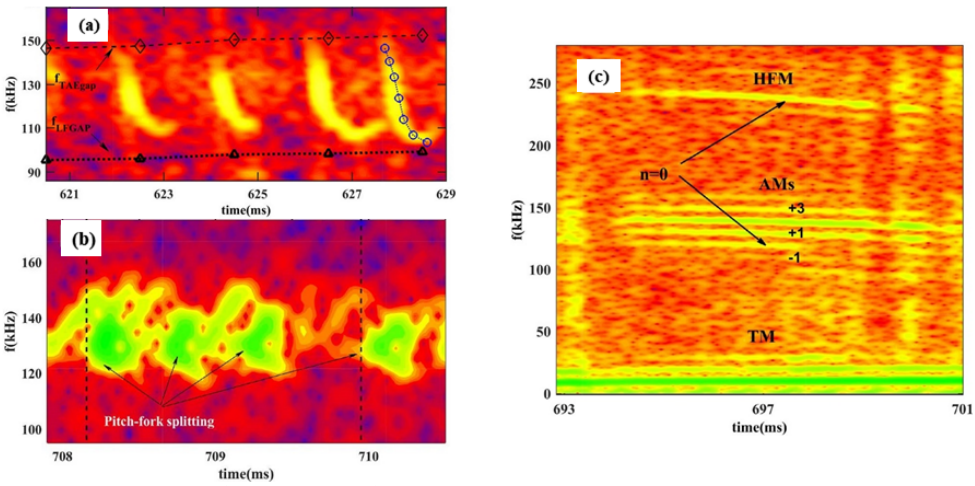

图 2.21　HL-2A 托卡马克实验结果：(a) 表示向下扫频的 $n = 3$ TAE，上下两条虚线和点线分别表示 TAE 间隙的中心频率和 TAE 间隙下积累点的频率；(b) 表示典型的上下扫频 (pitch-fork splitting) 的 TAE 行为；(c) 表示同时存在 TAE 和低频撕裂模情况下的频谱，可以看到不同 TAE 以及 TAE 和撕裂模之间互相存在模耦合。[145]。

此外，陈伟研究员和施培万博士等人也在 HL-2A 托卡马克上观察到了丰富而且清晰的高频阿尔芬本征模和低频磁流体模式非线性耦合的物理过程[145–148]。如图2.21所示，在 HL-2A 托卡马克放电中，分别观察到了不同行为的 TAE，包括如图 (a) 所示的下扫频 $n = 3$ TAE，其主要在电子密度下降的放电中被发现，TAE 的频率从 TAE 间隙的中心向下扫频到下积累点，从而完成一个周期。此外，HL-2A 托卡马克上观察到了由于高能量粒子驱动

率和背景等离子体的阻尼率相近情况下 (临界稳定) 产生的典型的上下同时扫频 (pitch-fork splitting) 的 TAE，也称为 splitting TAE。如图 (b) 所示，splitting TAE 主要为向上扫频，同时向下扫频受到一定程度的抑制 (可能与 hole-clump 对的非对称性移动有关)。而图 (c) 展示有低频撕裂模情况下，不同 TAE 以及 TAE 和撕裂模之间存在强烈的非线性耦合过程，包括产生多支不同 n ($n = 0, \pm 1, 3, ...$) 的 TAE 频段的模式以及高频的 $n = 0$ 的 EAE 频段的轴对称模式。通过理论和对实验数据的分析，发现高频 TAE 可以和低频撕裂模耦合产生新的 TAE 频段的高频模式，而这三支波也同时满足三波耦合的环向模数和频率匹配条件[145]。此外，对照图 (a)-(b) 和 (c) 可以发现另一重要的现象，即在有撕裂模等强烈低频磁流体不稳定性活动的情况下，TAE 的扫频行为受到明显抑制。反之，在撕裂模等低频磁流体不稳定性活动较弱的情况下，TAE 的扫频行为十分明显。对此，祝佳博士采用 CLT-K 程序较为自洽地模拟了存在撕裂模情况下，TAE 扫频的非线性过程，发现通行高能量粒子和撕裂模的共振行为对前者与 TAE 的非线性共振演化产生影响，导致撕裂模活动期间，TAE 扫频行为出现明显减弱的现象[109]。

此外，在 CHS 环形螺旋装置中，S. Ohshima 等人观察到 $m/n = 2/1$ 的鱼骨模不稳定性造成的磁场畸变使得高能量粒子发生轨道损失，从而驱动产生了环向对称的径向电场，也就是对应于 $m/n = 0/0$ 的带状流[149]。如图2.22所示，在 0.6ms 之前，系统中的主要模式为 $m = 2$ 的模结构，且 $m = 2$ 的不稳定性的幅值逐渐增强。在 0.8 到 1.2ms 之间，$m = 2$ 的鱼骨模不稳定性存在快速的向下扫频，见文献 [Ohshima et al. 2007][149] 图 1，同时伴随着 $m = 0$ 带状流结构的出现。而在 1.5ms 之后，环向对称的 $m = 0$ 的带状流成为系统中主导的模式。这里的带状流产生机制主要是由于 $m/n = 2/1$ 鱼骨模造成大量全域的高能量粒子损失，从而产生一个系统性的径向高能量粒子损失电流 (δj_b)，并由于新经典电流和高能量粒子损失电流之间的径向力学平衡条件，$\delta j_b = (\partial j_{neo}/\partial E_r)\, \delta E_{r,m=0}$ (δj_{neo} 表示新经典电流)，从而产生相应的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 带状流和径向电场。根据估算，在 CHS 装置中，$\partial j_{neo}/\partial E_r$ 大约为 $2\mathrm{AkV^{-1}m^{-1}}$，$\delta E_{r,m=0}$ 约为 $0.2\mathrm{kVm^{-1}}$，该 $\delta E_{r,m=0}$ 对应需要的总粒子轨道损失电流 δI_{loss} 约为 2A，符合 CHS 的实验参数。不同于常见的漂移波湍流非线性过程产生的带状流，CHS 装置上发现的由于高能量粒子和等离子体不稳定性相互作用导致粒子损失的过程为研究磁约束等离子体中可能的带状流产生机制提供了新的方向。

除了这里介绍的部分 NSTX、HL-2A 和 CHS 等装置上的实验结果，在其他众多的实验装置中也观察到了不同剪切阿尔芬波、高能量粒子以及其他等离子体不稳定性之间的非线性相互作用。例如在 FTU[41]、J-TEXT[33] 和 MAST[44] 等托卡马克都发现了丰富的高频剪切阿尔芬波和撕裂模等低频磁流体不稳定性之间的非线性相互作用。在未来燃烧等离子体中，α 粒子以及其他辅助加热产生的高能量粒子、各种剪切阿尔芬波不稳定性，以及撕裂模等磁流体不稳定性都有可能同时存在，研究波-波和波-粒子等不同形式的非线性相互作用对未来 ITER 等聚变示范堆的运行有着重要的意义。

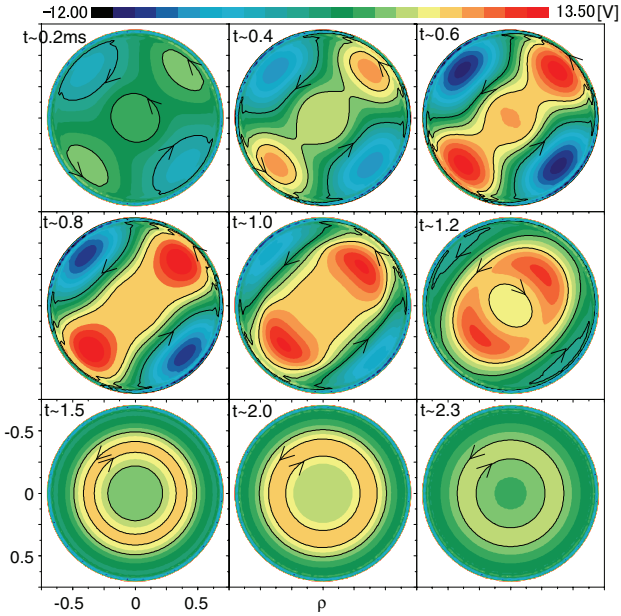

图 2.22　CHS 装置上的实验结果，分别为第 0.2、0.4、0.6、0.8、1.0、1.2、1.5、2.0 和 2.3ms 时刻的电势扰动重构图。图中的等势线即为 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 漂移的速度流线[149]。

2.6　磁流体不稳定性和高能量粒子物理的主要数值研究方法

为了研究和理解托卡马克中不同类型的等离子体不稳定性和高能量粒子物理，往往需要借助解析理论和数值模拟工具来解释现有托卡马克中的观察到的实验现象，并对未来堆级别的托卡马克实验提供借鉴。对于本论文所关注的磁流体不稳定性、剪切阿尔芬波和高能量粒子相关的物理过程，主要可以通过磁流体模型以及磁流体-动理学 (kinetic) 混合模型进行描述。国际上现有的托卡马克数值计算和模拟程序中，从数值方法上区分，主要包含本征值程序 (数值计算) 和初值程序 (数值模拟) 两类，而从物理模型上来分类，则主要分为磁流体程序、动理学程序，以及磁流体-动理学混合程序三类。

本征值程序主要通过简正模方法或者能量原理构建本征方程 (组) 来求解系统中线性不稳定性的本征值 (频率和增长率等) 和本征解 (模结构)。具体可以通过打靶法[72] 或者本征矩阵法[73] 进行求解。其中打靶法强烈依赖于初始 (边界) 值以及边界条件的选取，往往需要采用合适的推进方式，例如显式 (explicit method) 的龙格库塔法 (Runge Kutta method) 和预估矫正法 (predictor-corrector method) 等，或者采用隐式 (implicit method) 推进方法等，并对初始猜测解做尽可能详细的参数扫描以期望得到所需要的所有本征解。而本征矩法往往结合有限差分和有限元等空间离散方式将本征方程 (组) 转化成数值本征矩阵问题。通过求解矩阵的本征值来得到系统中可能存在的模式频率、增长率和模结构。本征矩阵法的计算结果一定程度上也依赖于数值边界条件的处理和离散网格的分辨率等。本征值程序一般用来快速扫描系统中可能存在的所有或者绝大多数不稳定性，计算效率高，但一般用于求解线性问题。

初值模拟程序基于一组现有的含时 $(\partial/\partial t)$ 偏微分方程组，一般从系统的初始平衡态出发，让系统根据模型方程自洽演化，若系统本身存在不稳定性或者存在外加驱动/源项的情况下，相应的模式会随时间的推进而增长。初值模拟程序的模型方程可以是线性或完全非线性，因此可以用来自洽演化不稳定性的线性增长、非线性饱和，以及不同模式的耦合过程等。初值模拟程序往往需要在空间和时间上分别离散，空间的离散方式同上述本征矩阵法类似，一般采用有限差分、有限元或者傅里叶谱方法等，而时间上则与上述的打靶法类似，主要分为显式推进和隐式推进，前者往往需要考虑数值稳定性条件，而后者一般无条件稳定，但需要考虑物理和数值的收敛性。对于方程中不同项的处理，也有程序会同时采用显隐式混合的时间推进方式 (半隐式)。初值模拟程序一般单次计算只能获得一支或若干支主要的模式，且计算量通常远大于本征值程序，但相比于本征值程序，初值程序往往能获得更为丰富和重要的非线性结果。

对于不同的等离子体不稳定性，往往需要借助不同的物理模型进行求解。下文将简要介绍磁约束等离子体物理数值研究中常用的磁流体模型、动理学模型和磁流体-动理学混合模型。

2.6.1 磁流体模型

磁流体模型由于忽略了粒子的个体行为，仅考虑等离子体的集体性响应，对相当一部分宏观等离子体不稳定性的描述是高效而可靠的。磁流体程序往往从磁流体方程组出发，对电磁场等物理量在空间进行离散，从而在固定的网格上数值求解本征值问题或者初值问题 (欧拉法)，计算得到相应的磁流体不稳定性的线性和非线性结果。对于初值磁流体程序，其计算效率和数值稳定性往往强烈依赖于时间和空间离散格式以及程序的边界处理。此外，由于空间离散在相邻网格点之间存在依赖性，初值磁流体程序的并行规模往往严重受限于计算网格的分辨率，难以做到较大规模的高效并行计算。本论文所使用的 CLT 程序和 CLT-K 程序的磁流体部分即采用了磁流体模型，具体的程序细节将在第3.1章做介绍。

2.6.2 动理学模型

由于磁流体模型忽略了等离子体中粒子的动理学效应，因此无法描述托卡马克中粒子拉莫尔回旋半径或者漂移轨道宽度尺度的微观和介观不稳定性，例如漂移波湍流等，也无法描述粒子和波的 (共振) 相互作用，例如高能量粒子激发的剪切阿尔芬波不稳定性、高能量粒子的约束和输运等问题。因此，动理学模型初值程序往往从带碰撞的 Fokker-Planck 方程或者无碰撞的 Vlasov 方程出发，含时求解包含电磁扰动情况下，等离子分布函数的演化，并对演化后的分布函数积分求解电荷密度和电流密度等信息，用来更新电磁场，实现电磁场-等离子体的自洽演化。

动理学模型的求解方式主要包含拉格朗日粒子云模拟方法 (Particle In Cell, PIC) 和欧拉网格方法。前者主要通过在相空间进行蒙特卡洛 (Monte Carlo) 采样，产生较大数量的

标记粒子 (marker) 来离散初始分布函数 $f_0(\mathbf{z})$，并通过电磁场推进，标记粒子沿着含时相空间 $(\mathbf{z}, t)$ 轨道运动，并时刻更新所携带的分布函数 $f(\mathbf{z})$，从而描述整体分布函数的演化，结合上述电磁场更新的方式，形成自洽的闭合迭代。PIC 模拟方法由于每个标记粒子的推进演化基本是独立的，因此具有非常好的并行度，在保证足够大的标记粒子数量情况下，大规模并行效率可以接近 100%。然而，PIC 模拟所采样的标记粒子数量经常受限于现有的计算资源，因此相比于磁流体模拟，PIC 模拟的结果往往有更大的数值噪声，为了保证计算结果的收敛性和可靠性，需要消耗磁流体程序数倍甚至更高的计算机时。

另一类欧拉方法的动理学程序则直接在六维 $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 或者五维相空间的固定网格上对分布函数进行离散求解，其思路和难点与磁流体初值程序比较相似，计算结果相比于 PIC 模拟有更低的数值噪声，但由于网格维度高，其计算量相比于磁流体程序提高了两到三个数量级甚至更多。因此在现有计算机计算资源条件下，该方法在磁约束等离子体模拟中仍较少被采用。本论文所使用的 CLT-K 程序的动理学部分采用的即为 PIC 模拟方法，其细节将在第3.2章中介绍。

2.6.3 磁流体-动理学混合模型

考虑到磁流体程序的高效性以及动理学模型更丰富的波-粒子相互作用的物理图像，为了兼顾计算效率和模型完备性，磁流体-动理学混合模拟模型在磁约束等离子体领域得到了广泛的应用。磁流体-动理学混合模型一般采用磁流体方程描述背景等离子体，用 PIC 模拟描述另一组份粒子的动理学行为，例如高能量粒子等。这样的混合模型既能高效地描述宏观等离子体不稳定性的非线性演化过程，又能同时包含 (高能量) 粒子和宏观不稳定性的 (共振) 相互作用，可以用来研究燃烧等离子内丰富的高能量粒子物理过程，包括高能量粒子对剪切阿尔芬波不稳定性的共振激发、对磁流体模式稳定性的影响，以及不稳定性对高能量粒子约束和输运的影响等。

磁流体-动理学混合模拟程序在数值上也往往需要同时考虑上述两种模型的算法，因此需要兼顾磁流体程序的数值稳定性、边界处理、并行拓展，以及 PIC 模拟的高噪声、计算量大等问题。本论文所使用的 CLT-K 程序即采用了磁流体-动理学混合模拟模型，其数值方法和程序结构将在第3.2章中做详细介绍。

2.6.4 磁约束等离子体主要的数值计算和模拟程序

根据上述不同的数值算法和物理模型，表2.2列举了国际上当前主要的磁约束等离子体数值计算和模拟程序。部分数值计算和模拟程序由于调研不够充分可能未在表2.2列出。

表 2.2　国际上主要的 (托卡马克) 磁约束等离子体数值计算和模拟程序。

程序名称	物理模型	程序类型	主要数值方法
MARS-F[150]	磁流体模型	本征值	
MARS-K[151]	磁流体-动理学混合模型	本征值	
NOVA[152]	磁流体模型	本征值	谱方法，有限元
NOVA-K[106]	磁流体-动理学混合模型	本征值	谱方法，有限元
DAEPS[153]	混合模型	本征值	有限元
GTC[154]	动理学模型	初值程序	PIC 方法
GTS[155]	动理学模型	初值程序	PIC 方法
GEM[156]	动理学模型	初值程序	PIC 方法
ORB5[157]	动理学模型	初值程序	PIC 方法
EAC[158]	动理学模型	初值程序	PIC 方法，模结构固定
GYRO[159]	动理学模型	初值程序	显式，欧拉法
GENE[160]	动理学模型	初值程序	欧拉法
GS2[161]	动理学模型	初值程序	欧拉法
BOUT[162]	磁流体模型	初值程序	包含多种空间离散和时间推进格式
XTOR[163]	磁流体模型	初值程序	显式，隐式，谱方法
JOREK[164]	磁流体模型	初值程序	隐式，谱方法，有限元
M3D-C1[165]	磁流体模型	初值程序	隐式，有限元
M3D-C1-K[166]	磁流体-动理学混合模型	初值程序	隐式，有限元，PIC 方法
M3D-K[167]	磁流体-动理学混合模型	初值程序	隐式，有限元，PIC 方法
NIMROD[168]	磁流体-动理学混合模型	初值程序	半隐式，有限元，谱方法，PIC 方法
MEGA[123]	磁流体-动理学混合模型	初值程序	显式，有限差分，PIC 方法
HMGC[169]	磁流体-动理学混合模型	初值程序	半隐式，有限差分，谱方法，PIC 方法
CLT[62]	磁流体模型	初值程序	显式，有限差分，谱方法
CLT-K[63]	磁流体-动理学混合模型	初值程序	显式，有限差分，谱方法，PIC 方法

3 CLT 与 CLT-K 程序

这一章将简要介绍本论文模拟工作所采用的磁流体模拟程序 CLT (**C**i **L**iu **T**i) 和磁流体-动理学混合模拟程序 CLT-K (**C**i **L**iu **T**i-**K**inetic/**K**uai) 程序，主要包括程序的物理模型、数值方法和程序开发的最新进展。

CLT 程序为针对托卡马克环位型开发的大柱坐标系 $\{R, \varphi, Z\}$ 磁流体数值模拟程序，主要通过求解磁流体方程组来研究托卡马克中的磁流体不稳定性等物理问题。CLT 程序最早由王胜博士[170]、张威博士[171] 和马志为教授在 2015 年开发完成。CLT 程序主要用 FORTRAN 90 双精度格式编写，目前已发展到 20000 余行有效代码。CLT 程序已被广泛应用于研究：i. 托卡马克中环向等离子体旋转[62] 和外加驱动电流对撕裂模的影响[172]；ii. 霍尔 (Hall) 效应和电子抗磁漂移效应对电阻内扭曲模和撕裂模的影响[173,174]；iii. 锯齿震荡和双撕裂模崩塌物理过程[175,176]；iv. 外加共振磁扰动 (Resonant Magnetic Perturbation, RMP) 和误差场 (error field) 的渗透机制[177,178] 等。

CLT-K 程序为祝佳博士和马志为教授在 CLT 程序磁流体框架基础上，进一步开发的磁流体-动理学混合模拟程序[63,109,179]。CLT-K 程序利用磁流体方程组求解得到的电磁场信息，通过 PIC 模拟来演化高能量粒子的运动方程和分布函数，并对 PIC 模拟更新的高能量粒子分布函数积分，得到高能量粒子电流或者压强，并将其耦合到磁流体方程组中。CLT-K 程序的 PIC 动理学部分程序框架和物理模型与祝佳博士的开发的 EAC (**E**nergetic particle and toroidal **A**lfvén wave interaction **C**ode) 程序[180] 基本一致。相比于 CLT 程序，CLT-K 程序进一步包含了波和粒子的共振效应，可以用来研究托卡马克中高能量粒子通过反朗道阻尼机制驱动的剪切阿尔芬波不稳定性，例如 TAE、RSAE 和 EPM 等，也可以用来研究高能量粒子和磁流体不稳定性的相互作用，如内扭曲模和撕裂模等。目前，CLT-K 程序已被用于研究：i. EPM 的非线性演化过程[63]；ii. 撕裂模对 TAE 扫频行为的影响[109]；iii. 撕裂模对高能量粒子再分布导致的带状流激发和 TAE 激发过程[179] 等。

3.1 CLT 程序模型、数值算法和升级工作

3.1.1 磁流体方程组

在磁约束聚变数值模拟中，磁流体模型被广泛采用。托卡马克中常见磁流体不稳定性的时间尺度往往远大于微观粒子运动的特征时间尺度，空间尺度通常也远大于粒子的拉莫尔回旋半径 $[L_{\mathrm{mhd}} \gg \varrho_{i(e)}]$。因此，PIC 模拟由于其巨大的计算资源需求，以及较差的信噪比，使得其在模拟宏观磁流体不稳定性时变得低效甚至不可行。与此同时，流体近似则可

以以更小的计算量和数值噪声得到较准确的模拟结果。磁流体方程组和传统计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 方程组有一定相似性，除了计算流体力学方程组里面的连续性方程、动量方程和能量/状态方程，磁流体方程组还包含了法拉第 (Faraday) 定律、广义欧姆 (Ohm) 定律、安培 (Ampere) 定律以及动量方程中的洛伦兹力项 (Lorentz force)。由于磁流体方程组主要用于描述低频 ($\omega_{\text{mhd}} \lesssim 10^2$kHz) 的宏观不稳定性，从而安培定律中：

$$\frac{c^{-2}\left|\partial \mathbf{E}/\partial t\right|}{\left|\nabla \times \mathbf{B}\right|} \sim \left(L_{\text{mhd}}\omega_{\text{mhd}}/c\right)^2 \ll 1,$$

因此位移电流项 $c^{-2}\partial \mathbf{E}/\partial t$ 在研究磁流体不稳定性时可以被忽略。基于磁流体方程组和流体力学方程组的相似性，计算流体力学程序可以被拓展为磁流体程序[181]，而反之，磁流体程序也可以退化到计算流体力学模型。

在 CLT 程序中，我们采用如下形式无量纲化后的完全磁流体 (full MHD) 方程组，其中包含了耗散 (扩散、粘滞和热导)、电阻和霍尔项等非理想效应：

$$\partial \rho/\partial t = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot [D\nabla (\rho - \rho_0)], \tag{3.1}$$

$$\partial p/\partial t = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \Gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot [\kappa \nabla (p - p_0)], \tag{3.2}$$

$$\partial \mathbf{v}/\partial t = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p)/\rho + \nabla \cdot [\nu \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)], \tag{3.3}$$

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E}, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta (\mathbf{J} - \mathbf{J}_0) + \frac{d_i}{\rho}(\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p), \tag{3.5}$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \tag{3.6}$$

其中 ρ、p、$\mathbf{v}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{J}$ 分别是等离子体密度、等离子体热压、等离子体速度、磁场、电场和电流密度。$\Gamma\,(=5/3)$ 是单原子理想气体近似下的等离子体绝热指数 (ratio of specific heat)。D、κ 和 ν 分别为等离子体的密度扩散系数、热传导系数和粘滞系数，η 为等离子体电阻率，$d_i = c/\omega_{pi}$ 是离子趋肤深度。

所有上述物理量做了如下归一化:$\mathbf{B}/B_m \to \mathbf{B}$,$\mathbf{x}/a \to \mathbf{x}$,$\rho/\rho_m \to \rho$,$\mathbf{v}/v_A \to \mathbf{v}$,$t/\tau_A \to t$，$p/\left(B_m^2/\mu_0\right) \to p$，$\mathbf{J}/\left(B_m/\mu_0 a\right) \to \mathbf{J}$，$\mathbf{E}/\left(v_A B_m\right) \to \mathbf{E}$，$[D, \kappa\&\nu]/\left(v_A a\right) \to [D, \kappa\&\nu]$，以及 $\eta/\left(\mu_0 v_A a\right) \to \eta$。其中 $\tau_A = a/v_A$ 是阿尔芬时间，$v_A = B_m/\sqrt{\mu_0 \rho_m}$ 是阿尔芬速度，B_m 和 ρ_m 分别是磁轴处的磁场强度和等离子体密度，a 为托卡马克极向截面的小半径。

为了满足等离子体的初始平衡条件，系统在初始时刻需要满足以下方程：

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v_0}) = 0, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla p_0 + \Gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \tag{3.8}$$

$$\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 - \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 + \nabla p_0 = 0, \tag{3.9}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0. \tag{3.10}$$

将上述初始平衡条件代入方程3.1-3.4，磁流体方程组可以展开为如下形式：

$$\partial\rho/\partial t = -\nabla\cdot(\rho\delta\mathbf{v}+\delta\rho\mathbf{v}_0)+\nabla\cdot[D\nabla(\rho-\rho_0)], \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\partial p/\partial t = &-\delta\mathbf{v}\cdot\nabla p-\mathbf{v}_0\cdot\nabla\delta p\\ &-\Gamma(p\nabla\cdot\delta\mathbf{v}+\delta p\nabla\cdot\mathbf{v}_0)+\nabla\cdot[\kappa\nabla(p-p_0)],\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\partial\mathbf{v}/\partial t = &-(\mathbf{v}\cdot\nabla\delta\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}_0+\delta\rho\mathbf{v}_0\cdot\nabla\mathbf{v}_0/\rho)\\ &+(\delta\mathbf{J}\times\mathbf{B}+\mathbf{J}_0\times\delta\mathbf{B}-\nabla\delta p)/\rho+\nabla\cdot[\nu\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)],\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = -\nabla\times\delta\mathbf{E}, \tag{3.14}$$

其中所有变量的下标‘$_0$’表示平衡量，而‘δ’表示扰动量，例如，$\delta\mathbf{v}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_0$。通过上述处理，CLT 程序可以排除由于平衡量所产生的初始误差。

3.1.2 坐标系统、空间离散和时间推进格式

CLT 程序采用了如图3.1所示的 $\{R,\ \varphi,\ Z\}$ 大柱坐标系统，R、φ 和 Z 分别表示装置的大半径方向、环向以及竖直方向。采用大柱坐标系统可以避免常见磁面坐标系 $\{r(\psi),\ \vartheta,\ \zeta\}$ 在 $r=0$ 磁轴处的奇点问题。当然，采用大柱坐标系统也导致 CLT 程序外边界的数值处理难度增大。在最初版本的 CLT 程序中，模拟边界借用了最外层闭合磁面网格进行处理，而在最近的工作中，网格切分 (CUT-CELL)[182] 的方法被应用于 CLT 程序来处理不同几何形状的计算边界。CLT 程序中不同边界处理方式将在第3.1.4节中进一步介绍。

CLT 程序中，在极向 R-Z 截面，我们采用了均匀直角网格，如图3.1 (b) 所示。空间上，在 R 和 Z 方向，采用四阶精度的五点中心差分格式进行离散，而在 φ 方向，既可以使用四阶精度中心差分，也可以使用傅里叶伪谱法 (pseudo-spectrum method)。在时间推进上，我们采用显格式的四阶精度的龙格库塔方法 (RK4)。为了满足显式的数值稳定性条件，即 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition，CLT 程序每一步迭代的时间步长由系统中最大的等离子体 (波) 速度决定，包括 i. 等离子体的流体运动速度，ii. 剪切阿尔芬波相速度，iii. 压缩阿尔芬波相速度，iv. 声波相速度。

3.1.3 程序结构和并行方案

CLT(-K) 程序结构如图3.2所示 (黄色阴影区域内为 CLT-K 程序中用来模拟高能量粒子物理的 PIC 计算模块)，在 CLT 的每一步迭代计算中，方程3.1-3.4中 ρ、p、$\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{B}$ 的八个分量需要被更新。图3.2中的红色模块主要对应程序的初始化、数据诊断、输入/输出 (I/O) 以及程序结束时的内存释放等，因此这部分程序计算量较小，但程序结构较为复杂，所以主要在 CPU 上运行；而蓝色模块对应程序的核心迭代计算过程，占据程序运行的绝大部分时间，因此需要进行并行加速，目前该部分程序主要通过 MPI (Message Passing Interface, 消息传递接口) 和 OpenACC 指令实现加速[183]，主要在 GPU 上执行；图3.2中绿色图例表示程序不同计算区域采用的 OpenACC 加速指令，具体 GPU 加速工作请参考附录A。

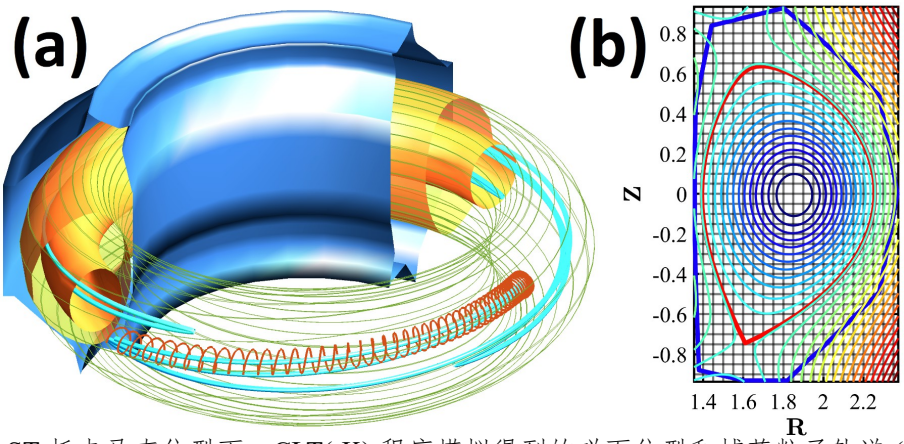

图 3.1　(a) EAST 托卡马克位型下，CLT(-K) 程序模拟得到的磁面位型和捕获粒子轨道 (蓝色轨迹线为导心运动轨迹，橙色螺旋轨迹为全轨道模拟得到的粒子轨迹)；(b) 极向截面网格划分。

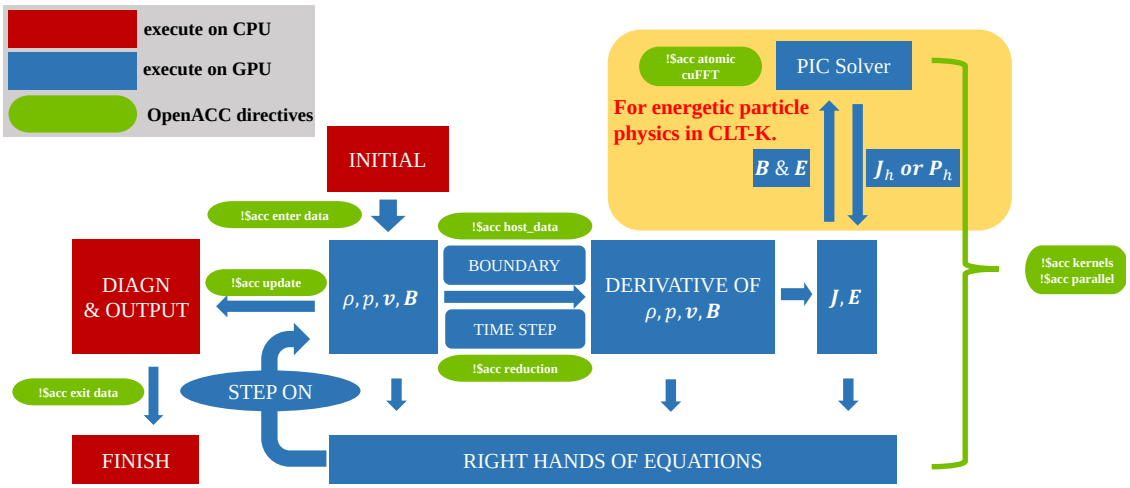

图 3.2　CLT(-K) 程序中的主要模块和 OpenACC 指令。所有蓝色模块对应的程序在 GPU 上执行，红色模块对应的程序在 CPU 上执行。绿色方块表示不同程序模块中所使用的不同 OpenACC 指令。黄色阴影区域内为 CLT-K 程序中用来模拟高能量粒子物理的 PIC 计算模块。

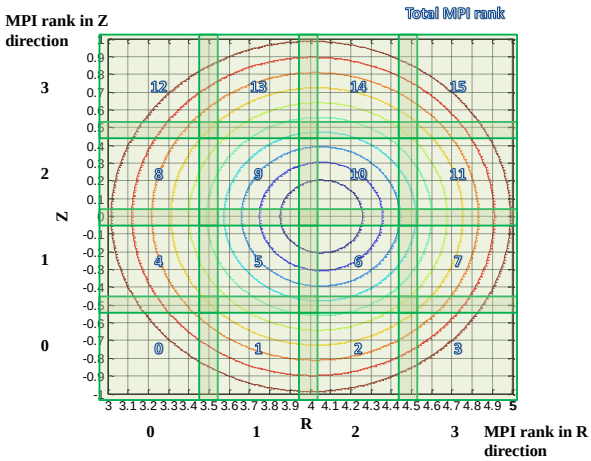

图 3.3　CLT 程序在 R-Z 平面的 MPI 并行区域分解示意图。

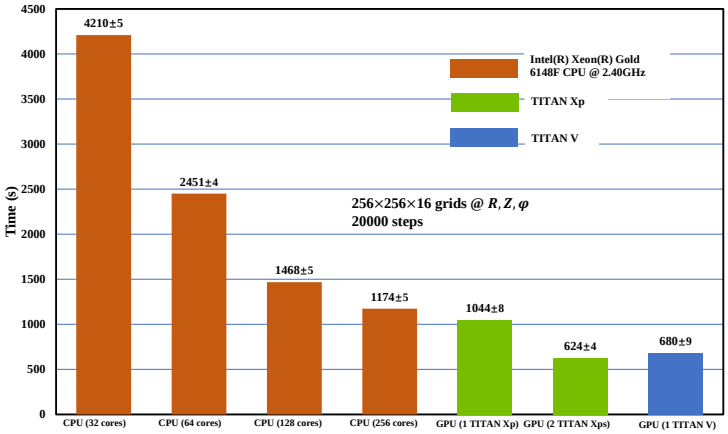

图 3.4 相同计算量下，CLT 程序在不同硬件设备上的运行时间：红色表示在 CPU 设备上运行，绿色表示在 TITAN Xp GPU 上运行，蓝色表示在 TITAN V GPU 上运行。

CLT 程序的并行方案主要分为两层：在第一层，如图3.3所示，我们将模拟区域所在的极向截面，也就是 R-Z 平面进行二维划分，由独立的 MPI 进程负责每个区域内的计算任务。相邻计算区域之间额外保留了四层网格的重叠区域，这主要是为了对每个计算区域边缘的网格点采用五点中心差分格式。因此，每一步计算完成后，在相邻的 MPI 区域之间需要通过 MPI_Send 和 MPI_Recv 等接口对每个计算区域最外两层格点进行数据更新。目前，由于需要在环向采用傅里叶伪谱法或者进行模数分解，CLT 程序目前在环向并未进行 MPI 并行。在第二层，对于每个计算区域内的 $\{R, \varphi, Z\}$ 方向的网格遍历，由于每个网格计算过程是互相独立的，因此对于程序内绝大多数的循环体可以采用 OpenACC 等指令并行方式作进一步加速。由于 GPU 设备的普及，CLT 程序成功应用 OpenACC 加速指令，并结合 GPU 设备端 (device) 的 MPI 并行，实现了多 GPU 设备的高效并行[183]。具体程序的加速效果可参考图3.4，在相同计算规模下 (网格数：$256 \times 256 \times 16$ @ R, Z, φ，20000 步迭代)，采用 OpenACC 加速后，CLT 程序在 TITAN Xp 和 TITAN V 等单卡或者双卡上的运行速度远远超过了传统 256 核 CPU 平台的 MPI 并行计算速度。对于该计算规模，可以估算出，在四张 GPU 设备并行的情况下，CLT 程序的并行效率可以达到 70% 以上。此外，CLT 程序在 GPU 设备上运行结果的正确性也经过了严格的检验，保证了程序的可靠性。

3.1.4 边界条件处理和平衡输入

由于 CLT 程序采用了 $\{R, \varphi, Z\}$ 大柱坐标系统和极向均匀直角网格，且计算边界 (等离子体边界或者装置第一壁边界) 往往形状不规则，和计算网格点不重合，因此 CLT 程序的外边界处理变得较为复杂。目前 CLT 程序发展出了两种边界处理方式，第一种：直角网格和磁面网格插值外推法；第二种：直角网格切分法。

早期版本的 CLT 程序主要采用了第一种边界处理方法[170]，在这个方法中，王胜博士等人额外采用了一套磁面网格来处理边界问题。如图3.5所示，内层红色磁面以内的黑点 (·) 表示远离边界的正常网格点，可以通过五点中心差分进行离散和更新。而红色磁面附近

的圆圈点 (○) 表示靠近边界的非正常网格点，这些网格点无法直接应用五点中心差分，因此需要通过边界条件处理进行更新。图3.5所对应的第一种边界处理方法的主要流程可以概括为以下步骤：

i. 将蓝色磁面附近黑点 (·) 上的扰动物理量 $\delta\mathcal{F}$ 插值到蓝色磁面对应的两层磁面网格点上；

ii. 将蓝色磁面上的值通过不同边界条件 (例如，自由边界条件：$\partial\delta\mathcal{F}/\partial r|_{r=a}=0$；固定边界：$\delta\mathcal{F}|_{r=a}=0$) 外推到外侧的两层红色磁面上；

iii. 将两层红色磁面网格点上更新后的扰动物理量 $\delta\mathcal{F}$ 插值回圆圈点 (○) 对应的靠近边界的非正常网格点上，从而完成一轮完整的边界点更新。

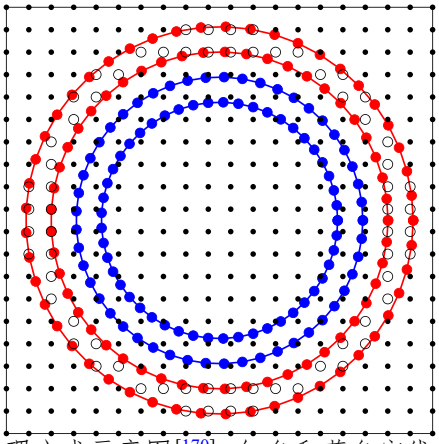

图 3.5　CLT 程序的第一种边界处理方式示意图[170]：红色和蓝色实线分别表示最外侧第 1-4 层磁面，红色磁面以内的黑点 (·) 表示正常网格点，可以通过五点中心差分离散和更新，红色磁面附近的圆圈点 (○) 表示靠近边界的非正常网格点，需要通过边界条件处理更新。

最新版本的 CLT 程序中，我们借鉴计算流体力学里常用的网格切分方法[182,184] 来处理非规则边界问题。根据不同网格点到计算边界的距离，我们可以分别在 R 和 Z 方向独立地将每个计算网格点分成六类，即考虑 R 和 Z 两个方向，一共有十二类网格点。图3.6展示了沿 Z 方向进行网格分类得到的六类网格点的定义，对每一类点采用不同的差分离散格式，不同类型网格点具体的差分格式可参考附录B (下文 d_Z 表示沿 Z 方向网格点到计算边界的距离，h_Z 表示 Z 方向网格宽度)：

i. 常规网格点 (regular points)：即在边界内且远离计算边界的点，可以用正常的五点中心差分格式进行离散和更新；

ii. 第一类非常规网格点 (1st type irregular points)：靠近计算边界，但和计算边界仍然相隔一个有效计算网格点。对第一类非常规网格点采用五点中心偏差，需要用到靠近边界一侧的边界点和第二类非常规网格点的值，以及另一侧的两个常规网格点的值；

iii. 第二类非常规网格点 (2nd type irregular points，$d_Z > 0.5h_Z$)：靠近计算边界，且和计算边界的距离大于半个网格宽度。对第二类非常规网格点采用五点偏差，需要用到靠近边界一侧的边界点的值，以及另一侧的两个常规网格点和一个第一类非常规网格点的值；

iv. 内部舍弃网格点 (inside dropped points，$d_Z \le 0.5h_Z$)：由于在某一个方向距离边界点太

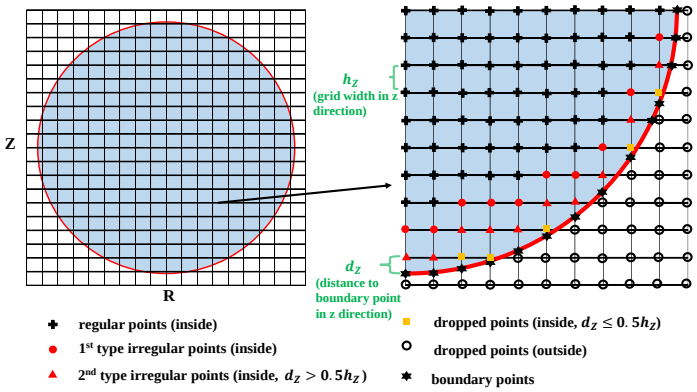

图 3.6 CLT 程序的第二种边界处理方式示意图[184]，红色实线表示计算边界。右图展示了第四象限的网格点分类，不同形状的点表示不同类别的网格点，根据不同网格点和 Z 方向计算边界的距离，可以将计算网格点分为如下几类：i. 常规网格点 (regular points)；ii. 第一类非常规网格点 (1st type irregular points)；iii. 第二类非常规网格点 (2nd type irregular points)；iv. 内部舍弃网格点 (inside dropped points，$d_Z < 0.5h_Z$)；v. 外部舍弃网格点 (outside dropped points)；vi. 边界点 (boundary points)，即 Z 方向网格线和边界线的交点。该图仅展示了 Z 方向的网格点分类，根据每个网格点和 R 方向计算边界的距离，也需要将每个网格点在 R 方向做同样的分类。

近，所以该方向上对这类点不需要通过差分进行离散，但需要通过相邻网格点插值进行更新。但在另一个方向，该点有可能为上述三类点之一，需要用相应的数值格式进行离散；

v. 外部舍弃网格点 (outside dropped points)：不在计算范围内，不需要计算；

vi. 边界点 (boundary points)，即 Z 方向网格线和边界线的交点：目前采用固定边界条件，所有扰动量在边界点的值为零，后续将拓展到自由边界等其他边界条件。

上述第一种边界处理方式，由于需要借用最外几层磁面网格进行插值，所以只能用来处理最外层闭合磁面以内的等离子体区域，但使用磁面网格对于处理垂直或者平行磁面方向的边界条件更为自然。第二种边界处理方式，可以被应用于非规则形状的计算边界，但现阶段只能处理凸计算边界，即每根网格线和计算边界最多只能有两个交点，此外该边界处理方式后续还需要拓展为自由边界等其他边界条件，以用来处理更多类型的托卡马克不稳定性问题，例如垂直不稳定性 (Vertical Displacement Event, VDE) 等。

CLT 程序的初始平衡输入接口目前主要支持两种格式文件：第一种为通过 NOVA 程序内的 QSOLVER 平衡求解器[185] 得到相应的平衡文件，并在 CLT 程序中进行读取；第二种类型为 EFIT 格式 (G EQDSK format) 的 Gfile 平衡文件[186]，CLT 程序根据其数据格式进行相应的读取。对于前者的 QSOLVER 得到的平衡文件，其有效区域限定于最外层闭合磁面以内，不包含磁零点 (X-point) 和刮削层区域 (Scrape-Off Layer, SOL)，因此主要用来研究托卡马克闭合磁面以内靠近芯部的等离子体不稳定性，并可以采用上述第一种或者第二种边界处理方式。对于后者的 EFIT 格式得到的平衡文件，其数据范围往往包括磁零点和

刮削层区域。因此可以结合上述第二种边界处理方式，将计算区域拓展到闭合磁面以外，如图3.1所示，这样可以包括磁零点和刮削层区域，规避最外层闭合磁面的边界条件，从而更自洽地模拟等离子体边界附近和刮削层区域的磁流体不稳定性，例如边缘局域模 (Edge Localized Mode, ELM) 和台基区共振磁扰动渗透等物理过程。此外，对于刮削层区域，CLT 程序目前将其近似为是低密度/压强/温度，以及高电阻率的等离子体，并用上述磁流体方程组3.1-3.6进行求解。关于 CLT 程序的实验位型拓展和下一节内容所使用的共振磁扰动模数分析的介绍可参见附录C。

3.1.5 共振磁扰动模块

CLT 程序还进一步开发了共振磁扰动模块来模拟研究共振磁扰动和误差场相关的物理问题。CLT 程序中的共振磁扰动模块最初根据 EAST 托卡马克上的共振磁扰动线圈参数进行开发。如图3.7所示[30]，EAST 装置的共振磁扰动系统包含上下两组线圈，每组线圈又包含八个独立的线圈，每个线圈由四扎导线构成，每扎导线可提供最大 2.5kA 的电流，即每个共振磁扰动线圈可提供最大 10kA 的电流。通过调整每个线圈的电流大小和方向，共振磁扰动的环向模数可以从 $n=1$ 到 4 变化。

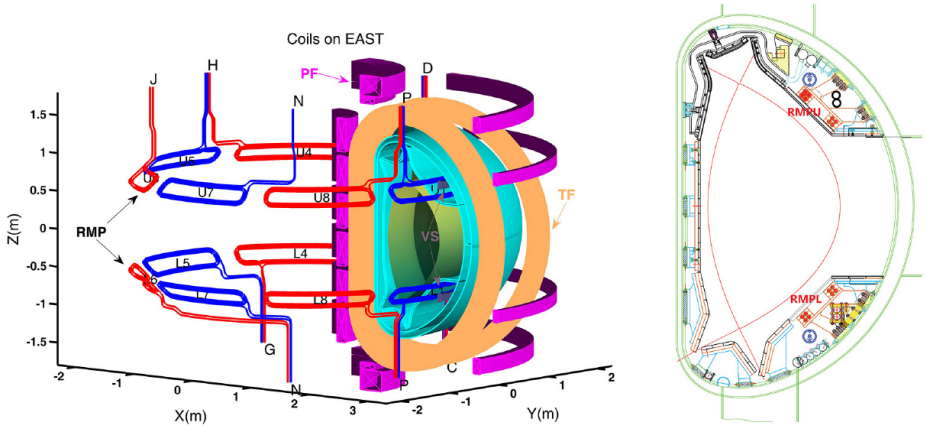

图 3.7 EAST 托卡马克上的共振磁扰动线圈示意图[30]。

根据图3.7所给的共振磁扰动线圈参数，我们在 CLT 程序初始化时，通过毕奥-萨伐尔定律 (Biot−Savart law) 求解所有共振磁扰动线圈电流在每一个计算网格点所产生的真空磁矢势 $\mathbf{A}_{\mathrm{RMP}}$。并在程序模拟开始时刻，将计算所得到的真空磁矢势施加到刮削层区域，并使磁扰动所产生的磁矢势在达到最外层闭合磁面之前衰减为零 (假定初始外加磁扰动未渗透进等离子体，只存在于刮削层区域)，通过 $\mathbf{b}_{0,\mathrm{RMP}}=\nabla\times\mathbf{A}_{\mathrm{RMP}}$ 计算刮削层的稳态扰动磁场分布，叠加到磁流体方程组的迭代计算中。计算过程中，计算边界处的外加扰动磁场为固定边界条件，即不考虑由于等离子体响应在计算边界上产生的扰动磁场。外加共振磁扰动的扰动场 $\mathbf{b}_{0,\mathrm{RMP}}$ 可以乘以一个时间演化函数 $\mathcal{I}(t)$ 来表示共振磁扰动线圈电流和对应扰动磁场幅值随时间的爬升过程。并考虑到实验中除了静态磁扰动，还存在动态磁扰动。因此，通过将稳态线圈计算得到的扰动磁场 ($\mathbf{b}_{0,\mathrm{RMP}}$) 环向旋转半个周期，得到其共轭场 ($\mathbf{b}^{*}_{0,\mathrm{RMP}}$)，

并分别乘以 $\cos(\omega_{\mathrm{RMP}}t)$ 和 $\sin(\omega_{\mathrm{RMP}}t)$，得到环向转动频率为 ω_{RMP} 的动态共振磁扰动。同时考虑到共振磁扰动的线圈电流爬升和环向转动，线圈产生的扰动磁场随时间演化满足：

$$\mathbf{b}_{\mathrm{RMP}}(t) = \left[\mathbf{b}_{0,\mathrm{RMP}}\cos(\omega_{\mathrm{RMP}}t) + \mathbf{b}^{*}_{0,\mathrm{RMP}}\sin(\omega_{\mathrm{RMP}}t)\right]\mathcal{I}(t). \tag{3.15}$$

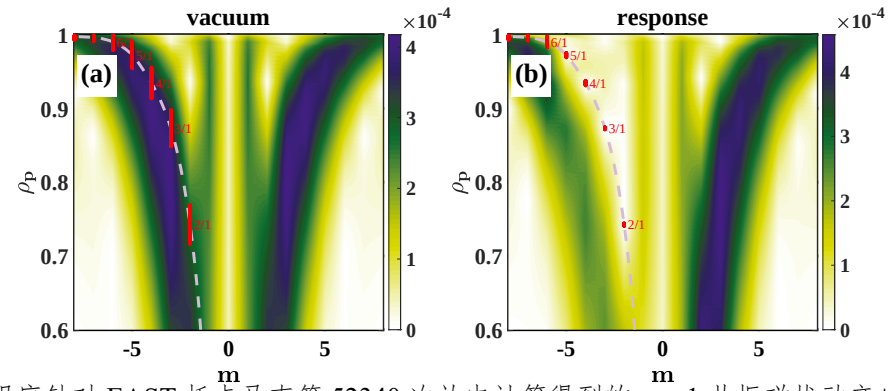

图 3.8 CLT 程序针对 EAST 托卡马克第 52340 次放电计算得到的 $n=1$ 共振磁扰动产生的垂直磁面磁场扰动 $b^{r}_{n=1}$ 谱图：(a) 真空场情况；(b) 考虑等离子体响应后的情况。虚线表示满足 $q(r)=m/n$ 的共振面，每层有理面的磁岛宽度用红色线段表示。纵轴 ρ_p 为小半径，横轴 m 为极向模数[177]。

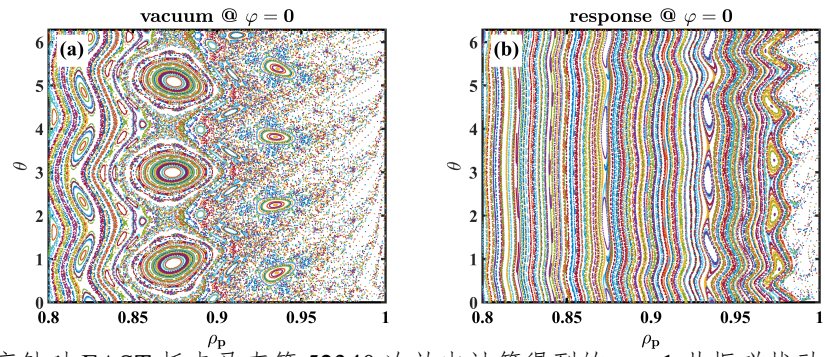

图 3.9 CLT 程序针对 EAST 托卡马克第 52340 次放电计算得到的 $n=1$ 共振磁扰动产生的磁场庞加莱 (Poincaré) 截面图：(a) 真空场情况；(b) 考虑等离子体响应后的情况[177]。

图3.8展示了针对 EAST 托卡马克第 52340 次放电，CLT 程序 (考虑环向等离子体旋转，使用实验参数的电阻率) 根据真空场和考虑等离子体响应分别计算得到的 $n=1$ 共振磁扰动模式谱图。可以见到，图3.8 (b) 中考虑等离子体响应以后，有理面附近的共振磁扰动几乎完全被等离子体屏蔽，其磁岛宽度远小于图3.8 (a) 对应的真空场情形，其中共振面在 $-m$ 侧表示等离子体环向电流和环向磁场方向相反。相对应的，图3.9展示了真空场和考虑等离子体响应后的磁场庞加莱 (Poincaré) 截面图，等离子体响应对共振磁扰动的屏蔽效应使得图3.9 (b) 中磁面的随机场宽度远小于图3.9 (a) 的真空场情况。图3.8-3.9中 CLT 程序计算得到的共振磁扰动谱图以及庞加莱截面图与之前 MARS-F 程序的计算结果一致[30]。

在最近的工作中，我们也将 HL-2A 托卡马克的共振磁扰动模块引入 CLT 程序中，用以研究相关的共振磁扰动物理问题。HL-2A 托卡马克的共振磁扰动线圈如图3.10所示[32]，该

共振磁扰动系统同样包含上下两组线圈，每组包含两个对称分布的独立线圈，每个线圈可以提供最大 5kA 的直流电流和 3kA 的交流电流。通过调整每个线圈的电流和方向，HL-2A 托卡马克可以实现不同模数分布的共振磁扰动，来进行边缘局域模的控制和缓解等。

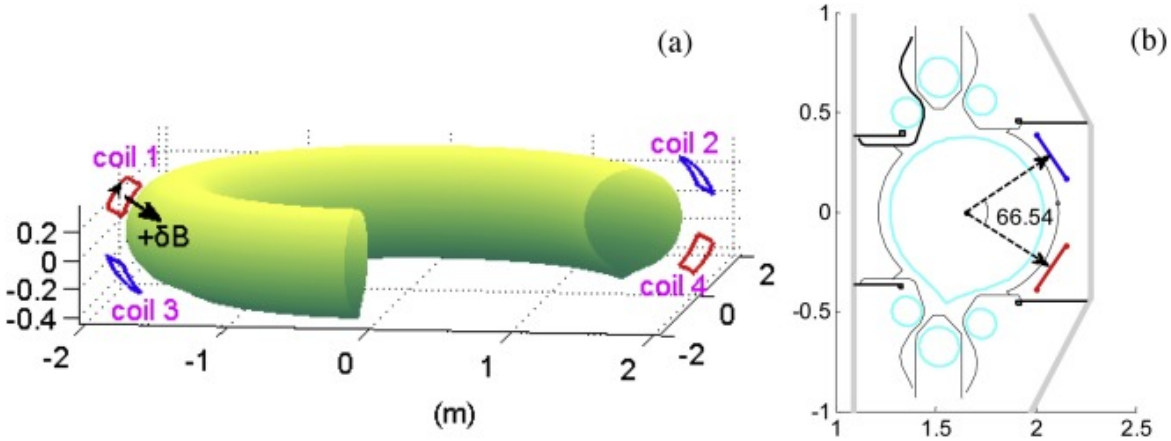

图 3.10　HL-2A 托卡马克上的共振磁扰动线圈示意图[32]。

3.2　CLT-K 程序模型、数值算法和升级工作

3.2.1　磁流体-动理学混合模拟模型

磁流体方程组3.1-3.6描述了流体近似下，等离子体的宏观演化，但缺少波和粒子的相互作用，特别是高能量粒子和波的非绝热共振效应，因此无法描述托卡马克燃烧等离子体中由于高能量粒子通过反朗道阻尼机制驱动的不稳定性。为了在模拟中自洽考虑高能量粒子和波的相互作用，我们需要在磁流体方程组基础之上，将高能量粒子效应耦合进来，如图3.2中 CLT-K 程序流程所示。因此，我们从高能量粒子的流体动量方程出发：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_h \mathbf{v}_h\right)+\nabla\cdot\left(\rho_h \mathbf{v}_h \mathbf{v}_h\right)=\mathbf{J}_h\times\mathbf{B}-\nabla\cdot\mathcal{P}_h+\rho_q\mathbf{E}, \tag{3.16}$$

其中 $\mathbf{v}_h$ 为流体元平均速度，即 $\mathbf{v}_h=\int \mathbf{v}_p f_h\left(\mathbf{v}_p\right) d\mathbf{v}_p / \int f_h\left(\mathbf{v}_p\right) d\mathbf{v}_p$，$\mathbf{v}_p$ 为每个粒子的运动速度，ρ_q 为高能量粒子电荷密度，而：

$$\mathcal{P}_h=M_h\int\left(\mathbf{v}_p-\mathbf{v}_h\right)\left(\mathbf{v}_p-\mathbf{v}_h\right) f_h\left(\mathbf{v}_p\right) d\mathbf{v}_p. \tag{3.17}$$

进一步定义不考虑流体元平均平移速度 $\mathbf{v}_h$ 的高能量粒子压强张量：

$$\mathbf{P}_h=M_h\int \mathbf{v}_p \mathbf{v}_p f_h\left(\mathbf{v}_p\right) d\mathbf{v}_p. \tag{3.18}$$

将方程3.17-3.18代入动量方程3.16中，有如下形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_h \mathbf{v}_h\right)=&\ \mathbf{J}_h\times\mathbf{B}-\nabla\cdot\mathbf{P}_h+\rho_q\mathbf{E}\\&-\nabla\cdot\left(\rho_h \mathbf{v}_h \mathbf{v}_h\right)-\nabla\cdot\left(M_h \mathbf{v}_h \mathbf{v}_h\int f_h\left(\mathbf{v}_p\right) d\mathbf{v}_p\right)\\&+\nabla\cdot M_h\int\left(\mathbf{v}_p \mathbf{v}_h+\mathbf{v}_h \mathbf{v}_p\right) f_h\left(\mathbf{v}_p\right) d\mathbf{v}_p,\end{aligned} \tag{3.19}$$

方程3.19右端后三项抵消，并对于理想磁流体近似，忽略平行方向电场 $E_{\parallel}$，可以得到文献 [Park et al. 1992][187] 中的高能量粒子的动量方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_h \mathbf{v}_h\right) = \mathbf{J}_h \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}_h + \rho_q \mathbf{E}_{\perp}. \tag{3.20}$$

若同时考虑背景等离子体和高能量粒子的总动量方程，并满足准中性条件：

$$\rho_b \frac{d}{dt}\mathbf{v}_b + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_h \mathbf{v}_h\right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_b - \nabla \cdot \mathbf{P}_h, \tag{3.21}$$

其中总电流满足 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_h$。

在方程3.21中减去高能量粒子动量方程3.20的平行分量：$\partial\left(\rho_h \mathbf{v}_{h\parallel}\right)/\partial t = -\left(\nabla \cdot \mathbf{P}_h\right)_{\parallel}$，我们可以得到高能量粒子压强耦合形式的动量方程：

$$\rho_b \frac{d}{dt}\mathbf{v}_b + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_h \mathbf{v}_{h\perp}\right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_b - \left(\nabla \cdot \mathbf{P}_h\right)_{\perp}, \tag{3.22}$$

由于 $\rho_h \ll \rho_b$，高能量粒子的垂直方向惯性项 $\partial\left(\rho_h \mathbf{v}_{h\perp}\right)/\partial t$ 可以忽略。此外下文将证明，在 Chew-Goldberger-Low (CGL)[188] 压强张量表述下，方程3.20右端项的垂直分量可以完全抵消，即 $\partial\left(\rho_h \mathbf{v}_{\perp}\right)/\partial t = 0$。因此，再结合方程3.3中的粘滞项，方程3.22可以近似为[187]：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_b = -\mathbf{v}_b \cdot \nabla \mathbf{v}_b + \left[\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_b - \left(\nabla \cdot \mathbf{P}_h\right)_{\perp}\right]/\rho_b + \nabla \cdot \left[\nu \nabla\left(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_{b0}\right)\right]. \tag{3.23}$$

我们也可以在方程3.21中减去整个高能量粒子动量方程3.20，得到高能量粒子电流耦合形式的动量方程[187]：

$$\rho_b \frac{d}{dt}\mathbf{v}_b = \left(\mathbf{J} - \mathbf{J}_h\right) \times \mathbf{B} - \nabla p_b - q_h \mathbf{E}_{\perp}, \tag{3.24}$$

其中右端最后一项 $-q_h \mathbf{E}_{\perp}$ 可以被高能量粒子 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移产生的电流所抵消。因此，在 CLT-K 程序中，计算 $\mathbf{J}_h$ 时忽略高能量粒子 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移的贡献 (下文出现的 $\mathbf{J}_h$ 都忽略了高能量粒子的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移)，并考虑方程3.3中的粘滞项，方程3.24写成[63]：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_b = -\mathbf{v}_b \cdot \nabla \mathbf{v}_b + \left[\left(\mathbf{J} - \mathbf{J}_h\right) \times \mathbf{B} - \nabla p_b\right]/\rho_b + \nabla \cdot \left[\nu \nabla\left(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_{b0}\right)\right]. \tag{3.25}$$

上述压强耦合方程3.23和电流耦合方程3.25适用条件为 $\rho_h \ll \rho_b$。在压强耦合方程3.23中，我们忽略了高能量粒子的垂直惯性项 $\partial\left(\rho_h \mathbf{v}_{h\perp}\right)/\partial t$。除此之外，压强耦合方程3.23和电流耦合方程3.25原则上是一致的，其解析和数值的一致性将在第4.1节进一步讨论。

3.2.2 高能量粒子运动方程

磁约束聚变中，由于强导向磁场的存在，粒子的拉莫尔回旋运动频率 ($\sim 10^4$kHz) 远高于我们关心的剪切阿尔芬波或者磁流体不稳定性的频率 ($0 \sim 10^2$kHz)，而其回旋半径 (对 3.5MeV 的 α 粒子，$B = 5$T，$\varrho_h \sim 5.4$cm) 远小于装置的尺寸半径 (对 ITER，$a \sim 2$m)。因此，根据漂移动理学，我们可以忽略粒子的拉莫尔回旋运动，只考虑回旋中心 $\mathbf{X}$ 的漂移运动，从而降低 PIC 模拟的维度，减小计算量。在 CLT-K 程序中，为了推进标记粒子的运动

轨道，我们采用 $\{\mathbf{X}, v_\parallel, \mu\}$ 五维坐标系下的回旋中心运动方程[189]，而由于磁矩 μ 是绝热守恒量，因此模拟方程可以进一步降低到四维 $\{\mathbf{X}, v_\parallel\}$，也就是：

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{1}{B_\parallel^\star}\left[v_\parallel \mathbf{B}^\star + \mathbf{E}^\star \times \mathbf{b}\right], \tag{3.26}$$

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{Z_h e}{M_h B_\parallel^\star}\mathbf{B}^\star \cdot \mathbf{E}^\star, \tag{3.27}$$

其中 $\mathbf{B}^\star = \nabla \times \mathbf{A}^\star$，$B_\parallel^\star = \mathbf{B}^\star \cdot \mathbf{b}$，($\mathbf{b}$ 为沿磁场方向的单位矢量)，$\mathbf{E}^\star = -\nabla\Phi^\star - \partial_t \mathbf{A}^\star$。有效电势和有效磁矢势 $\Phi^\star$ 和 $\mathbf{A}^\star$ 分别定义为：

$$\Phi^\star = \Phi + \frac{1}{Z_h e}\mu B, \tag{3.28}$$

$$\mathbf{A}^\star = \mathbf{A} + \frac{M_h v_\parallel}{Z_h e}\mathbf{b}. \tag{3.29}$$

Φ 和 $\mathbf{A}$ 分别表示电势和磁矢势，Z_h 表示粒子的有效电荷数，e 表示单位电荷，M_h 表示粒子质量。上述导心变换对应的雅可比 (Jacobian) 为 $\mathcal{J}_{GC} = B_\parallel^\star / M_h$(即 $d\mathbf{x}d\mathbf{v} = \mathcal{J}_{GC} d\mathbf{X} dv_\parallel d\mu d\alpha$)[63]。

在上述运动方程下，粒子的导心漂移运动可以自洽演化，包括平行运动、曲率漂移、梯度漂移和 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 漂移，即：

$$\mathbf{v}_B = v_\parallel \frac{\mathbf{B}}{B_\parallel^\star}, \tag{3.30}$$

$$\mathbf{v}_{\text{curvature}} = \frac{M_h v_\parallel^2}{Z_h e B_\parallel^\star}\nabla \times \mathbf{b}, \tag{3.31}$$

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{\mu}{Z_h e B_\parallel^\star}\mathbf{b} \times \nabla B, \tag{3.32}$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}} = \frac{1}{B_\parallel^\star}\mathbf{E} \times \mathbf{b}. \tag{3.33}$$

CLT-K 程序的 PIC 模拟部分通过四阶精度的龙格库塔方法来求解导心运动方程3.26-3.27。图3.1中蓝色轨迹线展示了 CLT-K 程序计算得到的 EAST 托卡马克中捕获高能量粒子的导心运动轨迹，橙色螺旋轨迹表示全轨道模拟得到的粒子轨迹。

3.2.3 δf 方法

在 PIC 模拟采样密度较低的情况下，通常会出现非常严重的数值噪声，从而降低模拟的信噪比，影响模拟结果的可靠性。因此，在标记粒子较少的情况下，降低 PIC 模拟的噪声水平对于提高模拟结果的质量和可靠性至关重要。在主流的磁约束聚变 PIC 模拟程序中，δf 方法[63,168,190] 得到了广泛的应用。CLT-K 程序也采用 δf 方法来计算高能量粒子贡献的扰动电流和扰动压强。

δf 方法的主要思想为：通过将粒子的总分布函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ 拆分为平衡分布函数 f_0 和扰动分布函数 δf，从而只需要演化扰动分布函数 δf。在这种情况下，数值积分计算扰动

电流和扰动压强时，可以避免引入粒子平衡分布函数 f_0，而只考虑扰动分布函数 δf 的贡献，从而降低噪声水平。广义的 δf 方法的基本过程可以从 Vlasov 方程出发，考虑电磁场情况下，即：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla f+\frac{q}{M}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{v}}f=0, \tag{3.34}$$

也就是：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{\mathbf{x}}\cdot\nabla f+\dot{\mathbf{v}}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}f=0. \tag{3.35}$$

更一般地，定义广义坐标 $\mathbf{z}=\{\mathbf{x},\mathbf{v}\}$，或者其他坐标系统，如 $\{\mathbf{X},v_{\parallel},\mu\}$ 和 $\{P_{\varphi},E,\mu\}$ 等，则 Vlasov 方程3.34-3.35变成如下形式：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{\mathbf{z}}\cdot\nabla_{\mathbf{z}}f=0. \tag{3.36}$$

将总分布函数拆分为平衡量和扰动量，即 $f=f_0+\delta f$，在平衡场下，f_0 满足方程：

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\dot{\mathbf{z}}_0\cdot\nabla_{\mathbf{z}}f_0=0. \tag{3.37}$$

$\mathbf{z}_0$ 表示平衡场下的未扰动轨道。通过将 $\dot{\mathbf{z}}=\dot{\mathbf{z}}_0+\delta\dot{\mathbf{z}}$ 和方程3.37代入方程3.36，我们可以得到关于扰动分布函数 δf 的 Vlasov 方程：

$$\frac{\partial\delta f}{\partial t}+\dot{\mathbf{z}}\cdot\nabla_{\mathbf{z}}\delta f=-\delta\dot{\mathbf{z}}\cdot\nabla_{\mathbf{z}}f_0. \tag{3.38}$$

即扰动分布函数 δf 的演化满足：

$$\begin{aligned}\dot{\delta f}&=-\delta\dot{\mathbf{z}}\cdot\nabla_{\mathbf{z}}f_0\\&=-\frac{df_0}{dt}.\end{aligned} \tag{3.39}$$

公式3.39中的 df_0/dt 表示的是平衡分布函数由于扰动场产生的演化。在实际模拟中，我们往往会定义一个新的标记粒子的数值分布函数 $g(\mathbf{z})$，并可以定义每个标记粒子的分布函数的权重，即 $p=f/g$ 与 $w=\delta f/g$，方程3.39可以写成：

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{1}{g}\frac{df_0}{dt}. \tag{3.40}$$

而 PIC 模拟得到的物理量 C 关于扰动分布函数 δf 的积分 δC 可以通过对标记粒子的权重函数求和近似得到：

$$\begin{aligned}\delta C&=\int C(\mathbf{z})\,\delta f\,\mathcal{J}d\mathbf{z}\\&=\sum_i^N C(\mathbf{z})\,w_iS(\mathbf{z};\mathbf{z}_i)\,,\end{aligned} \tag{3.41}$$

其中 $S(\mathbf{z};\mathbf{z}_i)$ 为数值积分的形状 (权重) 函数 (shape function)，满足 $\int S(\mathbf{z};\mathbf{z}_i)\,d\mathbf{z}=1$。

在 CLT-K 程序中，我们将分布函数表示为三个守恒量 $\{P_\varphi, E, \mu\}$ 的函数，即 $f(P_\varphi, E, \mu)$，并根据粒子投掷角的定义 $\Lambda \equiv \mu B_0/E$，方程3.40可以展开为[180]：

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{g}\left[\frac{dP_\varphi}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial P_\varphi} + \frac{dE}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial E} + \frac{d\Lambda}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \Lambda}\right], \tag{3.42}$$

其中：

$$\frac{dP_\varphi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)_1 \cdot \nabla P_\varphi + \left(\frac{dv_\parallel}{dt}\right)_1 \frac{\partial P_\varphi}{\partial v_\parallel}, \tag{3.43}$$

$$\frac{dE}{dt} = Z_h e \mathbf{v}_d \cdot \delta\mathbf{E} + Z_h e v_\parallel \frac{\delta \mathbf{B}}{B_\parallel^*} \cdot \delta\mathbf{E}, \tag{3.44}$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{\mu B_0}{E^2}\frac{dE}{dt}. \tag{3.45}$$

而：

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_1 = \frac{1}{B_\parallel^\star}\left[v_\parallel \mathbf{B}^\star + \mathbf{E}^\star \times \mathbf{b}\right] - \frac{1}{B_{\parallel 0}^\star}\left[v_\parallel \mathbf{B}_0^\star + \mathbf{E}_0^\star \times \mathbf{b}_0\right], \tag{3.46}$$

$$\left(\frac{dv_\parallel}{dt}\right)_1 = \frac{Z_h e}{M_h B_\parallel^\star}\mathbf{B}^\star \cdot \mathbf{E}^\star - \frac{Z_h e}{M_h B_{\parallel 0}^\star}\mathbf{B}_0^\star \cdot \mathbf{E}_0^\star. \tag{3.47}$$

3.2.4 高能量粒子压强耦合模型拓展

最初版本的 CLT-K 程序采用的是电流耦合模型[63,109]，而在本论文的工作中，为了验证电流耦合方程3.23和压强耦合方程3.25所对应模型的等价性，我们将 CLT-K 程序进行拓展，以同时包含上述两种耦合方式。压强耦合方程3.23和电流耦合方程3.25中的高能量粒子压强张量 $\mathbf{P}_h$ 和电流 $\mathbf{J}_h$ 可以通过对高能量粒子的分布函数积分得到。其中，对于压强张量 $\mathbf{P}_h$，我们可以假设分布函数依赖于 $v_\perp$ 的值，而忽略其在 $\mathbf{v}_\perp$ 方向上的依赖，因此可以将 $\mathbf{P}_h$ 写成回旋各项同性 (gyrotropic) 的 CGL 形式[188]：

$$\mathbf{P}_h = P_{h\perp}\mathbf{I} + \left(P_{h\parallel} - P_{h\perp}\right)\mathbf{bb}, \tag{3.48}$$

其中 $\mathbf{I}$ 单位张量，而：

$$P_{h\perp} = \int \frac{1}{2} M_h v_\perp^2 f d\mathbf{v}, \tag{3.49}$$

$$P_{h\parallel} = \int M_h v_\parallel^2 f d\mathbf{v}. \tag{3.50}$$

高能量粒子的电流 $\mathbf{J}_h$ 则可以写成两部分：即高能量粒子的导心运动速度贡献的电流 $\mathbf{J}_{GC}$ 和磁化电流 $\mathbf{J}_{MAG}$：

$$\mathbf{J}_h = \mathbf{J}_{GC} + \mathbf{J}_{MAG}, \tag{3.51}$$

其中 $\mathbf{J}_{GC}$ 由方程3.30-3.32的漂移速度贡献，方程3.33表示的 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 漂移与方程3.24中的 $-q_h\mathbf{E}_\perp$ 抵消，因此不进入 $\mathbf{J}_h$ 的计算中：

$$\mathbf{J}_{GC} = \int Z_h e\left(\mathbf{v}_{\text{curvature}} + \mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_B\right) f d\mathbf{v}, \tag{3.52}$$

$$\mathbf{J}_{MAG} = \nabla\times\mathcal{M} = -\nabla\times\int \mu\mathbf{b} f d\mathbf{v}. \tag{3.53}$$

将方程3.30-3.32的漂移速度代入方程3.51-3.53积分，并引入方程3.49和3.50所表示的垂直和平行方向压强标量，高能量粒子电流 $\mathbf{J}_h$ 可以表示成如下形式：

$$\mathbf{J}_h = Z_h e N V_\parallel \mathbf{b} + \frac{1}{B}P_{h\parallel}\nabla\times\mathbf{b} + \frac{1}{B}\left(-P_{h\perp}\nabla\times\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\nabla P_{h\perp}\right), \tag{3.54}$$

其中：

$$NV_\parallel = \int v_\parallel f d\mathbf{v}. \tag{3.55}$$

方程3.54中右端第一项平行方向电流来自高能量粒子的平行运动速度 (方程3.30)，由于方程3.25中的 $\times\mathbf{B}$ 运算，该平行电流对系统演化不产生任何贡献。方程3.54中右端第二项由高能量粒子曲率漂移速度 (方程3.31) 贡献，第三项则由梯度漂移速度 (方程3.32) 和磁化电流 (方程3.53) 共同贡献。

根据第3.2.3节所介绍的 δf 方法，为了减小 PIC 模拟的噪声，模拟中通常对高能量粒子的扰动分布函数 δf 独立积分，得到对应扰动量：

$$\delta P_{h\parallel} = \int M_h v_\parallel^2 \delta f d\mathbf{v}, \tag{3.56}$$

$$\delta P_{h\perp} = \int \frac{1}{2} M_h v_\perp^2 \delta f d\mathbf{v}, \tag{3.57}$$

$$\delta\left(NV_\parallel\right) = \int v_\parallel \delta f d\mathbf{v}. \tag{3.58}$$

结合第3.2.2节的导心运动方程，计算上述扰动积分量时，还应考虑到雅可比 $[\mathcal{J}_{GC(0)} = B^\star_{\parallel(0)}/M_h]$ 的变化[167]，即：

$$\delta P_{h\parallel} \simeq \int M_h v_\parallel^2 \left[w + \frac{\delta B^\star_\parallel}{B^\star_\parallel}\left(\frac{f}{g} - w\right)\right] g dv_\parallel d\mu, \tag{3.59}$$

$$\delta P_{h\perp} \simeq \int \mu B \left[w + \frac{\delta B^\star_\parallel}{B^\star_\parallel}\left(\frac{f}{g} - w\right) + \frac{\delta B}{B}\frac{f}{g}\right] g dv_\parallel d\mu, \tag{3.60}$$

$$\delta\left(NV_\parallel\right) \simeq \int v_\parallel \left[w + \frac{\delta B^\star_\parallel}{B^\star_\parallel}\left(\frac{f}{g} - w\right)\right] g dv_\parallel d\mu. \tag{3.61}$$

此外，根据高能量粒子的压强和电流表达式 (公式3.48和3.54)，我们证明两者满足如

下的等价关系：

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_h \times \mathbf{B} &= \left[\left(P_{h\parallel} - P_{h\perp}\right)\nabla \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla P_{h\perp}\right] \times \mathbf{b} \\ &= \left\{\mathbf{b} \times \nabla \cdot \left[P_{h\perp}\mathbf{I} + \left(P_{h\parallel} - P_{h\perp}\right)\mathbf{bb}\right]\right\} \times \mathbf{b} \\ &= \left(\nabla \cdot \mathbf{P}_h\right)_\perp .\end{aligned} \tag{3.62}$$

因此，高能量粒子的压强张量在 CGL 表述下，即方程3.48，高能量粒子的垂直方向惯性项 $\partial\left(\rho_h \mathbf{v}_{h\perp}\right)/\partial t$ 自动等于零 $[\mathbf{J}_h \times \mathbf{B} = \left(\nabla \cdot \mathbf{P}_h\right)_\perp]$。因此，在这种情况下，总的压强耦合方程3.23和电流耦合方程3.25严格等价。而在减去初始平衡量的情况下，扰动形式的压强耦合和电流耦合方程的一致性则需要更细致的讨论，相关模拟和验证工作将在第4章中展开。

3.2.5 非均匀采样方法

在早期版本的 CLT-K 程序中，为了简便起见，我们采用均匀采样的方法来产生初始的标记粒子，即在五维相空间 $\left\{R,\, \varphi,\, Z,\, v_\parallel,\, v_\perp^2\right\}$ 均匀采样，这样得到的归一化后标记粒子数的分布函数为 $g = B/B_\parallel^\star$。然而，通过均匀采样得到的大部分粒子往往分布在不是我们所关心的相空间区域。如图3.11 (a) 所示，均匀采样下，大部分粒子都聚集在 $E \gtrsim 1$ 的能量较高的等离子体边界区域，而实际计算得到的 w 和 δf 演化较大的区域则主要在芯部的 $E \lesssim 0.5$ 低能量区间，这样导致了我们所关心的相空间区域由于标记粒子数太少造成 PIC 模拟的噪声过大，并且绝大多数的标记粒子在模拟中并没有明显演化，造成极大的计算资源浪费。因此我们借鉴 Wenjun Deng 等人的非均匀采样方法[191]，将 CLT-K 程序中的初始均匀粒子采样改成非均匀采样，根据图3.11 (b) 的相空间信息优化后的标记粒子主要聚集在我们所关心的 $E \leq 0.5$ 低能量区间，如图3.11 (c) 所示。该过程主要分为如下几个步骤：

i. 先用均匀采样方法计算一个初步的模拟结果，得到不稳定性线性增长阶段的标记粒子权重 $|w|$ 在相空间 $\{P_\varphi,\, \varepsilon,\, \mu\}$ 的分布；

ii. 根据上述 $|w|$ 在相空间 $\{P_\varphi,\, \varepsilon,\, \mu\}$ 的分布计算相空间的平均权重分布函数 $i\left(\mathbf{z}\right)$：

$$i\left(\mathbf{z}\right) \approx \frac{\sum_i^N |w_i|\, S\left(\mathbf{z};\mathbf{z_i}\right)}{\sum_i^N S\left(\mathbf{z};\mathbf{z_i}\right)}; \tag{3.63}$$

iii. 将上述得到的相空间权重分布函数 $i\left(\mathbf{z}\right)$ 归一化得到归一化后的权重分布函数 $I\left(\mathbf{z}\right)$：

$$I\left(\mathbf{z}\right) = i\left(\mathbf{z}\right) / \max\left\{i\left(\mathbf{z}\right)\right\}; \tag{3.64}$$

iv. 根据归一化后的相空间权重分布函数 $I\left(\mathbf{z}\right)$，对标记粒子进行重新蒙特卡洛 (Monte Carlo) 采样，或者根据 $I\left(\mathbf{z}\right)$ 剔除部分不重要的标记粒子，最终得到符合 $I\left(\mathbf{z}\right)$ 分布的标记粒子，然后对每个标记粒子的 g_i 和 w_i 等做如下调整：

$$g_i = g_i I_i, \tag{3.65}$$

$$\left(f/g\right)_i = f_i/g_i, \tag{3.66}$$

$$w_i = w_i/I_i; \tag{3.67}$$

v. 利用非均匀采样得到的标记粒子重新或者继续迭代计算，从而提高计算效率和模拟结果的信噪比水平。

此外，为了避免非均匀采样的粒子在相空间局部过于集中，造成非线性阶段或者多模模拟中其他相空间区域模拟精度的降低，在上述步骤 ii 中可以在相空间 $\{P_\varphi, \varepsilon, \mu\}$ 采用较为稀疏的网格来计算权重函数，从而使得标记粒子在较大范围内都有足够数量的分布，提高计算效率的同时，保证非线性或者多模模拟计算结果的准确性和收敛性。图3.11 (c) 所对应的权重函数即是在 $\{P_\varphi, \varepsilon, \mu\}$ 每个方向取 20 个网格计算得到的，因此其标记粒子数分布 g 在 $\varepsilon \leq 0.5$ 低能量区间有较宽的分布。

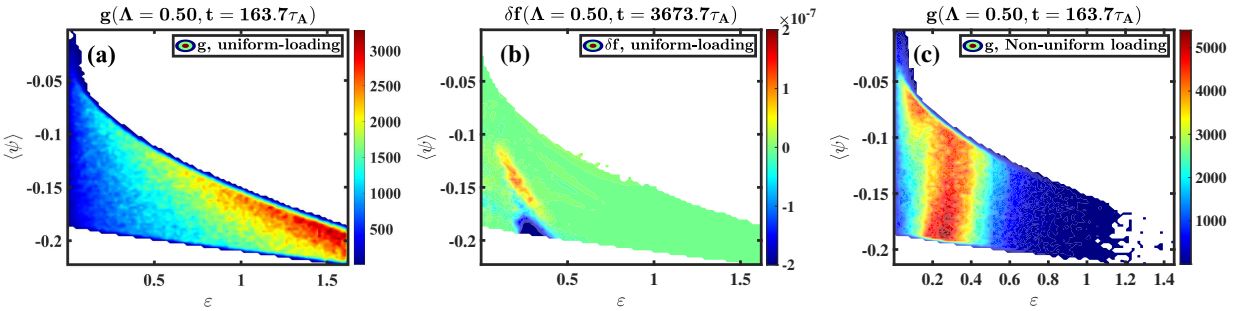

图 3.11 (a) 原始均匀采样方法下，标记粒子数分布函数 g；(b) 针对 $n = 1$ TAE 采用均匀采样模拟得到的相空间扰动分布函数 δf；(c) 根据 (b) 的相空间 δf 分布，采用非均匀采样方法得到的标记粒子数分布函数 g。

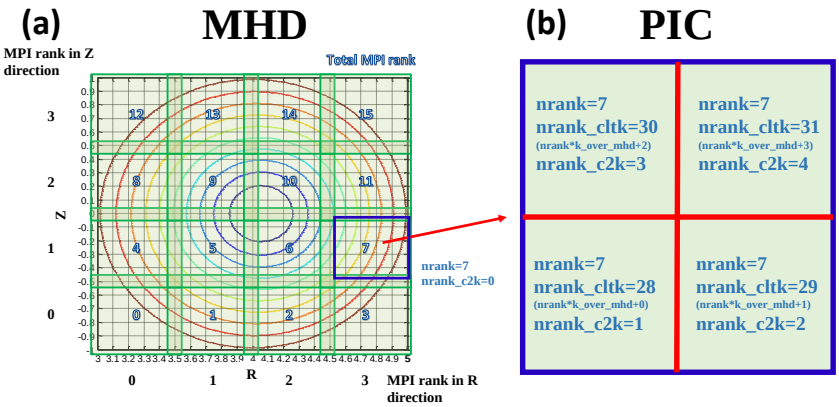

图 3.12 CLT-K 程序 MPI 并行方案：(a) 为磁流体程序 CLT 部分的区域分解示意图；(b) 为粒子部分程序并行示意图。

3.2.6 程序并行方案

最新版本的 CLT-K 程序将 PIC 模拟部分的 MPI 并行任务从磁流体计算中分解出来，即一部分 MPI 进程负责处理 CLT 程序部分的磁流体计算，另一部分 MPI 进程负责处理 PIC 模拟计算。由于 PIC 模拟部分的计算量远远大于磁流体部分程序，因此对于每个磁流体 MPI 进程所负责计算区域内的粒子，通常需要用数倍的 MPI 进程来计算。例如，图3.12表

示磁流体部分计算用了 16 个 MPI 进程，而 PIC 部分则用了四倍 (64 个) MPI 进程来计算。同时，为了更方便地实现不同 MPI 进程之间的数据交互，CLT-K 程序设计了四个 MPI 通信域，即：

i. 全局通信域：可以实现所有 MPI 进程的数据交互；

ii. MHD 内部通信域：只能在负责磁流体计算的 MPI 进程内部进行数据交互；

iii. PIC 内部通信域：只能在负责 PIC 计算的 MPI 进程内部进行数据交互；

iv. MHD-PIC 通信域：只能在负责同一块空间区域计算的任意一个磁流体 MPI 进程和其对应的几个 PIC MPI 进程之间进行数据交互。

除 CPU 版本的 CLT-K 程序外，由于 PIC 部分的计算任务主要是针对粒子数组的遍历和更新，而不同粒子之间的计算过程几乎是完全独立的，具有较好的并行可行性，因此我们同样采用 OpenACC 和 cuFFT 等数学库将 CLT-K 程序在 GPU 设备上实现了完整移植，并取得了较好的加速比。通过上述并行方案将 CLT-K 程序的磁流体计算和 PIC 计算解耦后，PIC 模拟部分的并行不再受限于磁流体计算的并行核数。因此，我们使用 CLT-K 程序于 2018 年和 2021 年分别在广州天河二号超级计算机的 CPU 计算平台和成都新一代曙光原型机的 GPU 加速卡平台上完成了十万核和二十万核的大规模并行计算，在给定计算规模情况下，CLT-K 程序可以达到较好的并行效率。

4 高能量粒子与磁流体不稳定性的线性相互作用

磁流体-动理学混合模型被广泛用来研究高能量粒子与磁流体不稳定性的相互作用，特别是后者的线性性质对高能量粒子的依赖关系，例如 M3D-K 和 NIMROD 等程序分别讨论了高能量粒子对内扭曲模[167,168] 和撕裂模[192–195] 线性稳定性的影响。在这些磁流体-动理学混合模拟工作中，所采用的均为压强耦合模型，根据第3.2.1和3.2.4节的讨论，电流耦合与 CGL 压强张量表述下的压强耦合模型理论上是完全等价的。但在实际的程序数值处理中，往往对扰动部分的高能量粒子电流和压强张量会采取不同的近似条件，因此需要对这两种耦合模型的等价性条件作进一步深入分析和讨论。在本章工作中，我们首先结合 CLT-K 程序，在原有电流耦合模型基础之上，拓展引入压强耦合模型，以此来验证两种耦合模型模拟结果在不同情况下的一致性。作为数值校验，我们针对高能量粒子对 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性稳定性的影响给出 CLT-K 程序的模拟结果。进一步，我们使用 CLT-K 程序讨论不同分布函数高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响，主要包括同向通行、反向通行和捕获高能量粒子的绝热和非绝热响应等。并探究高能量粒子驱动下低频 $m/n = 2/1$ 撕裂模向高频 $m/n = 2/1$ EPM 的转变过程，包括 EPM 的基本性质、波和粒子的共振条件，以及高能量粒子参数的影响等。

4.1 压强耦合和电流耦合的等价性

在第3.2.4节中，我们已初步证明高能量粒子电流 $\mathbf{J}_h$ (不包含 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 漂移) 和 CGL 表述的高能量粒子压强张量 $\mathbf{P}_h$ 之间满足 $\mathbf{J}_h \times \mathbf{B} = (\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 的力学平衡条件，因此，电流耦合方程3.23和压强耦合方程3.25原则上是完全一致的。在大部分磁流体-动理学混合模拟程序中，为减小 PIC 动理学模拟带来的数值噪声，第3.2.3节介绍的 δf 方法被广泛应用，即将高能量粒子的分布函数 f 拆分为平衡量 f_0 和扰动量 δf。其中平衡分布函数 f_0 一般以解析函数的形式给出，因此平衡电流 $\mathbf{J}_{h0}$ 和平衡压强张量 $\mathbf{P}_{h0}$ 可以通过解析或者数值积分的方式精确计算。而由扰动分布函数 δf 和扰动电磁场产生的扰动电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 和扰动压强张量 $\delta\mathbf{P}_h$，则需要对 PIC 模拟的标记粒子数值积分得到。本节内容中，我们会详细讨论高能量粒子扰动电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 和扰动压强张量 $\delta\mathbf{P}_h$ 的计算方式，并给出两者等价性的数值验证结果。

4.1.1 高能量粒子扰动压强和扰动电流的完整形式

CLT-K 程序和其他大部分磁流体-动理学混合模拟程序采用的初始平衡一般来自于求解 Grad-Shafranov 方程，并采用各向同性的标量压强[196]。但托卡马克中高能量粒子的压强在垂直和平行于磁力线方向往往具有很强的各向异性，因此这类各向同性的平衡难以自

洽地包含高能量粒子的贡献。如果在动量方程3.23或3.25中直接引入总的高能量粒子压强张量 $\mathbf{P}_h$ 或电流 $\mathbf{J}_h$，由于系统初始条件的不平衡会对模拟造成较大干扰。因此，对于静平衡 ($\mathbf{v}_0 = 0$)，我们需要在动量方程中减去由于洛伦兹力、标量压强以及高能量粒子压强张量不匹配产生的残余力 $\mathcal{F}$ (residual force)[a]：

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 - \left[\nabla p_{b0} + (\nabla \cdot \mathbf{P}_{h0})_{\perp \mathbf{b}_0}\right] \\ &= (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_{h0}) \times \mathbf{B}_0 - \nabla p_{b0} \\ &\neq 0,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 p_{b0} 表示背景等离子体的平衡压强，$\mathbf{J}_0$ 为包含背景等离子体和高能量粒子贡献的总平衡电流，下标‘$_{\perp \mathbf{b}_0}$’表示垂直于平衡磁场单位矢量 $\mathbf{b}_0$。公式4.1第一个等号对应系统总的力学平衡关系，同时包括背景等离子体和高能量粒子的电流和压强，而第二个等号对应背景等离子体的力学平衡关系，只包括背景等离子体的贡献。

对于压强耦合方程3.23，我们在其右端减去公式4.1中总的力学平衡关系，即 $\mathcal{F} = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 - \left[\nabla p_{b0} + (\nabla \cdot \mathbf{P}_{h0})_{\perp \mathbf{b}_0}\right]$，从而其写成扰动量的形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_b = &- \mathbf{v}_b \cdot \nabla \mathbf{v}_b + \left\{\mathbf{J}_0 \times \delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \delta p_b - \delta\left[(\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp\right]\right\}/\rho_b \\ &+ \nabla \cdot \left[\nu \nabla (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_{b0})\right],\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中：

$$\begin{aligned}\delta\left[(\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp\right] &= (\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp - (\nabla \cdot \mathbf{P}_{h0})_{\perp \mathbf{b}_0} \\ &= (\nabla \cdot \delta\mathbf{P}_h)_\perp \underline{+ (\nabla \cdot \mathbf{P}_{h0})_\perp - (\nabla \cdot \mathbf{P}_{h0})_{\perp \mathbf{b}_0}},\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{P}_h &= \mathbf{P}_h - \mathbf{P}_{h0} \\ &= \delta P_{h\perp}\mathbf{I} + \left(\delta P_{h\parallel} - \delta P_{h\perp}\right)\mathbf{bb} + \underline{\left(P_{h\parallel 0} - P_{h\perp 0}\right)\left(\mathbf{b}_0\delta\mathbf{b} + \delta\mathbf{bb}\right)}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

而对于电流耦合方程3.25，我们在其右端减去公式4.1中由背景等离子体贡献的力学平衡关系，即 $\mathcal{F} = (\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_{h0}) \times \mathbf{B}_0 - \nabla p_{b0}$，电流耦合方程变成如下形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_b = &- \mathbf{v}_b \cdot \nabla \mathbf{v}_b + \left[\mathbf{J}_0 \times \delta\mathbf{B} \underline{- \mathbf{J}_{h0} \times \delta\mathbf{B}} + (\delta\mathbf{J} - \delta\mathbf{J}_h) \times \mathbf{B} - \nabla \delta p_b\right]/\rho_b \\ &+ \nabla \cdot \left[\nu \nabla (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_{b0})\right],\end{aligned} \tag{4.5}$$

[a]绝大部分情况下，由于高能量粒子速度空间的各向异性以及其径向分布函数与背景等离子体不一致，$\mathcal{F}$ 不为零。但在少数模拟工作的参数设置中，如 NIMROD 程序模拟高能量粒子与 $m/n = 1/1$ 内扭曲模相互作用的研究[168]，通过使用各向同性，且径向分布与背景等离子体完全相同的高能量粒子分布函数，可以将高能量粒子的平衡压强张量 $\mathbf{P}_{h0}$ 简化为各向同性的标量压强 P_{h0}，从而在总平衡压强 p_0 中拆分出高能量粒子压强 p_{h0} 和背景等离子体压强 p_{b0}，严格满足 $\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 = \nabla p_{b0} + \nabla p_{h0}$，即 $\mathcal{F} = 0$，使得系统处于初始力学平衡。

其中：

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{J}_h = & \ \mathbf{J}_h - \mathbf{J}_{h0} \\
= & \ Z_h\delta\left(NV_\parallel\right)\mathbf{b} + \frac{1}{B}\left(\delta P_{h\parallel} - \delta P_{h\perp}\right)\nabla\times\mathbf{b} + \frac{1}{B}\mathbf{b}\times\nabla\delta P_{h\perp} \\
& \underline{+Z_h\left(NV_\parallel\right)_0\delta\mathbf{b} + \frac{1}{BB_0}\left(P_{h\parallel 0} - P_{h\perp 0}\right)\left(B_0\nabla\times\delta\mathbf{b} - \delta B\nabla\times\mathbf{b}_0\right)} \\
& \underline{+\frac{1}{BB_0}\left(B_0\delta\mathbf{b} - \delta B\mathbf{b}_0\right)\times\nabla P_{h\perp 0}}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

公式4.2-4.6中的 $\delta P_{h\parallel}$、$\delta P_{h\perp}$ 和 $\delta\left(NV_\parallel\right)$ 分别根据公式3.59-3.61计算得到，而 $\mathbf{J}_{h0}$、$\mathbf{P}_{h0}$、$P_{h\parallel 0}$、$P_{h\perp 0}$ 和 $\left(NV_\parallel\right)_0$ 则可以根据高能量粒子初始分布函数 f_0 的解析表达式结合公式3.48-3.55直接积分得到。

公式4.2-4.6中黑色部分对应的扰动高能量粒子压强 $\delta\mathbf{P}_h$ 和电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 主要来自于扰动分布函数 δf 的贡献，而带红色下划线部分则主要来自于高能量粒子平衡分布函数 (平衡电流和平衡压强) 对扰动磁场 $\delta\mathbf{B}$ 的线性响应。这两部分效应的贡献均为一阶扰动，处于同一量级 $[\sim\mathcal{O}(\delta)]$。因此，为了模型的自洽和严谨，原则上计算高能量粒子扰动压强 $\delta\mathbf{P}_h$ 和扰动电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 时应同时考虑这两部分效应的贡献。

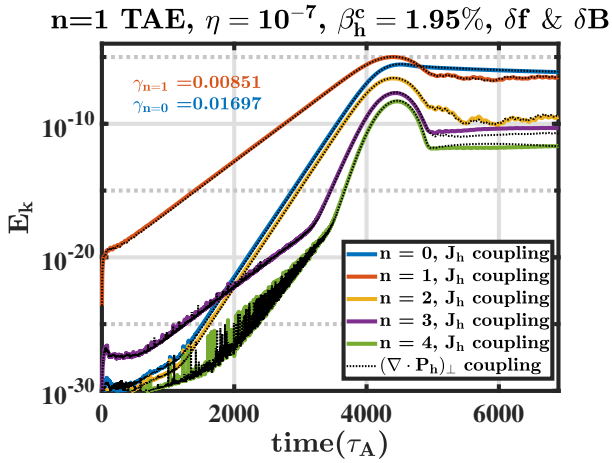

图 4.1 同时考虑高能量粒子扰动分布函数 δf 和扰动磁场 $\delta\mathbf{B}$ 贡献的情况下，高能量粒子激发 $n=1$ TAE 的非线性模拟中背景等离子体不同 n 的扰动动能 $\mathrm{E_k}$ 随时间的演化关系。彩色实线表示电流耦合的模拟结果，黑色点线表示压强耦合的模拟结果。

由于公式4.4和4.6对应的扰动压强张量 $\delta\mathbf{P}_h$ 和扰动电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 形式较为复杂，难以直接解析证明其等价关系。因此为了验证公式4.2-4.4对应的压强耦合模型与公式4.5-4.6对应的电流耦合模型在数值模拟中的一致性，我们使用 CLT-K 程序对各向同性高能量粒子激发 $n=1$ TAE 的物理问题进行完全非线性模拟[a]，结果如图4.1所示。可以看到，在同时考虑了高能量粒子扰动分布函数 δf 和扰动磁场 $\delta\mathbf{B}$ 贡献的情况下，压强耦合和电流耦合模拟得

[a] 本节内容中，模拟 $n=1$ TAE 采用的平衡分布、高能量粒子分布函数、耗散系数和电阻率等参数与第5.1节内容一致，由于本节不讨论关于 TAE 的模拟结果细节，故此处不展开介绍相关参数设置。

到的结果几乎完全一致，包括 $n=1$ TAE 的线性增长率和非线性饱和水平，以及 $n\neq 1$ 边带模的非线性演化趋势等。

4.1.2 扰动分布函数 δf 对高能量粒子扰动压强和扰动电流的贡献

在实际物理问题模拟中，往往更关注高能量粒子对波的响应产生的扰动分布函数 δf 带来的影响。例如，对于高能量粒子激发剪切阿尔芬波不稳定性等问题，高能量粒子的扰动分布函数 δf，特别是非绝热共振响应产生的 $\delta f_{\text{non-adiabatic}}$[64] 往往起决定性作用。在这种情况下，对于上述高能量粒子扰动压强张量和扰动电流的计算可以作进一步简化，即只考虑高能量粒子扰动分布函数 δf 的贡献。为此，我们可以忽略公式4.2-4.6中带红色下划线部分由于高能量粒子平衡分布函数 f_0 对扰动磁场 $\delta\mathbf{B}$ 线性响应的贡献，从而将高能量粒子的扰动压强张量项写成：

$$\delta\left[\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h\right)_\perp\right]\simeq\left(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h\right)_\perp, \tag{4.7}$$

$$\delta\mathbf{P}_h\simeq\delta P_{h\perp}\mathbf{I}+\left(\delta P_{h\parallel}-\delta P_{h\perp}\right)\mathbf{bb}. \tag{4.8}$$

高能量粒子扰动电流的形式则为：

$$\delta\mathbf{J}_h\simeq Z_h\delta\left(NV_\parallel\right)\mathbf{b}+\frac{1}{B}\left(\delta P_{h\parallel}-\delta P_{h\perp}\right)\nabla\times\mathbf{b}+\frac{1}{B}\mathbf{b}\times\nabla\delta P_{h\perp}. \tag{4.9}$$

并将压强耦合和电流耦合的动量方程扰动形式分别写成：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_b\simeq&-\mathbf{v}_b\cdot\nabla\mathbf{v}_b+\left\{\mathbf{J}_0\times\delta\mathbf{B}+\delta\mathbf{J}\times\mathbf{B}-\nabla\delta p_b-\left(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h\right)_\perp\right\}/\rho_b\\&+\nabla\cdot\left[\nu\nabla\left(\mathbf{v}_b-\mathbf{v}_{b0}\right)\right],\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_b\simeq&-\mathbf{v}_b\cdot\nabla\mathbf{v}_b+\left[\mathbf{J}_0\times\delta\mathbf{B}+\left(\delta\mathbf{J}-\delta\mathbf{J}_h\right)\times\mathbf{B}-\nabla\delta p_b\right]/\rho_b\\&+\nabla\cdot\left[\nu\nabla\left(\mathbf{v}_b-\mathbf{v}_{b0}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.11}$$

对于公式4.7-4.11所表示的扰动形式压强和电流耦合模型，类似于公式3.62，我们可以严格证明两者之间的等价性，即：

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{J}_h\times\mathbf{B}&=\left[\left(\delta P_{h\parallel}-\delta P_{h\perp}\right)\nabla\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\nabla\delta P_{h\perp}\right]\times\mathbf{b}\\&=\left\{\mathbf{b}\times\nabla\cdot\left[\delta P_{h\perp}\mathbf{I}+\left(\delta P_{h\parallel}-\delta P_{h\perp}\right)\mathbf{bb}\right]\right\}\times\mathbf{b}\\&=\left(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h\right)_\perp.\end{aligned} \tag{4.12}$$

因此，动量方程4.10和4.11相当于在磁流体动量方程3.3右端引入了高能量粒子扰动分布函数 δf 贡献的压强张量或者电流驱动项，即 $-\left(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h\right)_\perp$ 或者 $-\delta\mathbf{J}_h\times\mathbf{B}$。

对于只考虑高能量粒子扰动分布函数 δf 贡献的情况，我们使用与上一节完全相同的参数模拟 $n=1$ TAE 的非线性演化过程，以此在数值上验证公式4.7-4.11所示的压强耦合和电流耦合模型的一致性。如图4.2所示，两种耦合模型分别得到的 $n=1$ TAE 和 $n\neq 1$ 边带模的演化趋势几乎完全重合，且图4.2与4.1得到的 TAE 线性增长率十分接近，分别为

$\gamma_{n=1} = 0.00851\omega_A$ 和 $0.00842\omega_A$，这主要是由于高能量粒子的非绝热共振响应 $\delta f_{\text{non-adiabatic}}$ 对 TAE 起主要的去稳作用。在非线性阶段，由于扰动磁场 $\delta\mathbf{B}$ 的贡献，图4.2与4.1中 TAE 和边带模的演化特征产生较为显著的差异，其中图4.1所示的不同 n 分量近似进入稳态阶段，其幅值随时间变化不明显，而图4.2中不同 n 分量的幅值随时间存在明显的振荡变化现象。

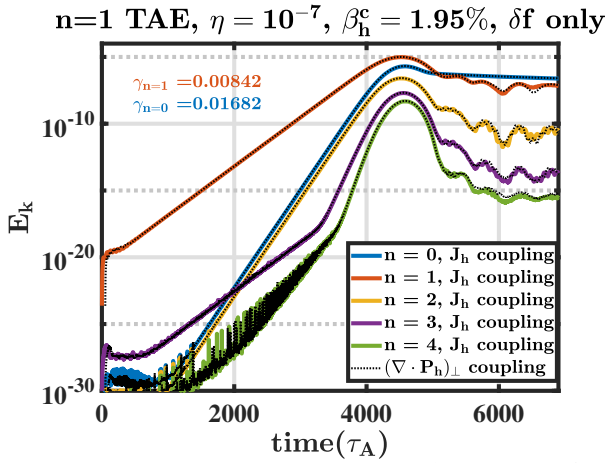

图 4.2 只考虑高能量粒子扰动分布函数 δf 贡献的情况下，高能量粒子激发 $n = 1$ TAE 的非线性模拟中背景等离子体不同 n 的扰动动能 E_k 随时间的演化关系。彩色实线表示电流耦合的模拟结果，黑色点线表示压强耦合的模拟结果。

4.1.3 现有混合模拟程序的近似方式

现有的完全磁流体-动理学混合模拟程序主要分为压强耦合和电流耦合两类，前者代表性的程序有 M3D-K[167] 和 NIMROD[168] 等，后者代表性的程序有 MEGA[123] 和 CLT-K (早期版本)[63] 等。此外，在最新版本的 CLT-K 程序中，我们在电流耦合模型基础之上，引入了压强耦合模型[179]。上述磁流体-动理学混合模拟程序已发表的工作普遍采用了第4.1.2节所对应的高能量粒子扰动压强或扰动电流形式，即忽略了磁场扰动量 $\delta\mathbf{B}$ 带来的修正。定性上，由于大多数等离子体不稳定性线性阶段扰动磁场较小，$\delta\mathbf{B}$ 的修正对线性模拟结果的影响有限，但在非线性阶段，特别是磁面产生较大扭曲形变或者类撕裂模响应时，高能量粒子平衡分布函数 f_0 对磁场扰动量 $\delta\mathbf{B}$ 的响应可能会对模拟结果产生较大影响。针对这一问题，定量的分析需要结合大量非线性物理问题和参数扫描工作做进一步细致而系统性的探究。

第3.2.1节中电流耦合方程3.25的推导是严格的，而压强耦合方程3.23中忽略了高能量粒子的垂直惯性项 $\partial(\rho_h\mathbf{v}_{h\perp})/\partial t$。但在 CGL 压强张量表述下，我们自动忽略了高能量粒子的垂直惯性项，从而这两个耦合方程是完全等价的 (见第3.2.4节)。然而，现有的压强耦合的混合模拟程序 (M3D-K 和 NIMROD 等) 与电流耦合的混合模拟程序 (MEGA 和早期版本的 CLT-K 等) 与之间的最大模型差异来自于前者在动量方程的近似处理，即 M3D-K 和 NIMROD 等程序在采用压强耦合模型时，均在动量方程右端采用了完整的 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 或 $\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h$

项[167,168,192]，即：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_b = &- \mathbf{v}_b\cdot\nabla\mathbf{v}_b + \left(\mathbf{J}\times\mathbf{B} - \nabla p_b - \nabla\cdot\mathbf{P}_h\right)/\rho_b \\ &+ \nabla\cdot\left[\nu\nabla\left(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_{b0}\right)\right], \qquad (4.13)\\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_b \simeq &- \mathbf{v}_b\cdot\nabla\mathbf{v}_b + \left(\mathbf{J}_0\times\delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{J}\times\mathbf{B} - \nabla\delta p_b - \nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h\right)/\rho_b \\ &+ \nabla\cdot\left[\nu\nabla\left(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_{b0}\right)\right]. \qquad (4.14)\end{aligned}$$

相比于 Park 等人于 1992 年工作中提出的原始压强耦合方程[187](也可参考第3.2.1节推导)，方程4.13和4.14额外忽略了高能量粒子在平行方向的惯性项 $\partial\left(\rho_h\mathbf{v}_{h\parallel}\right)/\partial t$。对于捕获高能量粒子相关的物理问题，由于其平行惯性项较小，该近似方式是合理的。但在通行高能量粒子起主要作用的物理问题中，其平行惯性项相比于背景等离子体往往不是小量，因此方程4.13的近似对于部分物理问题的研究会造成较大的定量误差，且不能与电流耦合模型得到一致的结果，该问题也在 Park 等人的原始工作中得到说明[187]。更准确的耦合模型应在方程4.13或4.14右端同样去掉 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 或 $\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h$ 的平行分量，即只考虑 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 或 $(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 的贡献，如公式3.23或4.10所示。

4.2 高能量粒子对 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性稳定性的影响

4.2.1 模拟参数

我们使用 CLT-K 程序研究各向同性的高能量粒子对 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性稳定性的影响，并采用文献 [Fu et al. 2006][167] 中的平衡位型和高能量粒子分布函数。其中，初始平衡文件来自于 QSLOVER 程序[185]，托卡马克环径比 $R_0/a = 2.763$，包含高能量粒子在内的磁轴总等离子体比压 $\beta^c_{\text{total}} = 8.0\%$，背景等离子体和高能量粒子压强关于极向归一化磁通 ψ_n 的径向分布表达式均为：

$$p_{b/h}\left(\psi_n\right) = p^c_{b/h}\exp\left(-\psi_n/0.25\right), \qquad (4.15)$$

初始平衡安全因子的表达式为：

$$q = q_0 + \psi_n\left[q_1 - q_0 + \left(q_1' - q_1 + q_0\right)\frac{\left(1-\psi_s\right)\left(\psi_n - 1\right)}{\psi_n - \psi_s}\right], \qquad (4.16)$$

其中 $\psi_s = \left(q_1' - q_1 + q_0\right)/\left(q_0' + q_1' - 2q_1 + 2q_0\right)$，$q_0 = 0.6$，$q_1 = 2.5$，$q_0' = 0.78$，$q_1' = 5.0$。初始平衡的无量纲化总等离子体压强和安全因子 q 的径向分布 $(r = \sqrt{\psi_n})$ 如图4.3所示。高能量粒子满足如下所示的各向同性慢化分布：

$$f_0 \propto \frac{1}{v^3 + v_c^3}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{v_0 - v}{\Delta v}\right)\right]\exp\left(-\frac{\langle\psi\rangle}{\Delta\psi}\right), \qquad (4.17)$$

其中，截止速度 $v_0 = 4v_A$，临界速度 $v_c = 0.58v_0$，$\Delta v = 0.001v_A$，$\langle\psi\rangle$ 为沿粒子轨道平均后的极向磁通[167]，$\Delta\psi = 0.25\left(\psi_{max} - \psi_{min}\right)$，垂直速度为 v_0 的高能量粒子的拉莫尔轨道

半径 ϱ_h 为 $0.0125a$。公式4.17的高能量粒子径向分布与公式4.15所给的压强径向剖面一致，因此在下面的模拟中，我们在总压强中减去高能量粒子的贡献，即可得到背景等离子体的压强剖面分布，即 $p_{b0}(r) = p_{\text{total0}}(r) - p_{h0}(r)$，从而使系统初始满足力学平衡条件，即 $\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 = \nabla(p_{b0} + p_{h0})$。在理想磁流体模拟中，我们设置所有非理想项的耗散系数均为零，即 $D,\ \kappa\&\nu = 0,\ \eta = 0$。但在 CLT-K 程序的混合模拟中，由于 PIC 模拟带来较大的数值噪声，会影响磁流体模拟的数值稳定性，因此需要引入一定的耗散项来保证程序的数值稳定性，我们设置较小的耗散系数：$D,\ \kappa\&\nu = 10^{-6},\ \eta = 10^{-7}$。另外，磁流体部分我们在 $\{R, \varphi, Z\}$ 方向分别使用 $256 \times 16 \times 256$ 的网格，并使用 500 万标记粒子进行 PIC 模拟，程序在磁流体和 PIC 部分的数值收敛性均已验证。本章节出现的所有频率、增长率和阻尼率均归一化到阿尔芬频率 $\omega_A = v_A/a$。

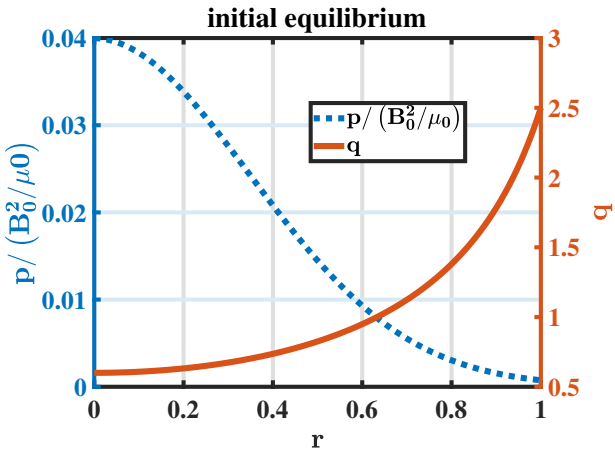

图 4.3 无量纲化后总等离子体压强 (点线) 和安全因子 q (实线) 的径向分布。

4.2.2 线性模拟结果

4.2.2.1 磁流体模拟

在不考虑高能量粒子的情况下，我们使用 CLT 程序扫描了 $m/n = 1/1$ 内扭曲模速度扰动的线性增长率对等离子体比压的依赖关系。在改变等离子体比压时，我们保持平衡的压强径向分布函数与公式4.15相同。首先在理想磁流体条件下，我们使用 NOVA 程序[152]计算得到每一个等离子体比压参数下 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性增长率的本征解，结果如图4.4红色圆圈所示。该平衡位型下，由于托卡马克的环效应，$m/n = 1/1$ 内扭曲模线性不稳定的等离子体比压临界条件为 $\beta_b^c \gtrsim 2\%$，随着等离子体比压的升高，$m/n = 1/1$ 内扭曲模的线性增长率也线性增大。而在 CLT 程序中，我们将所有非理想效应的耗散系数设置为零 ($D,\ \kappa\&\nu = 0,\ \eta = 0$)，从而在理想磁流体模型下进行初值模拟，得到 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性增长率和等离子体磁轴比压 β_b^c 的依赖关系如图4.4绿色方框所示。CLT 模拟得到的 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性增长率与 NOVA 程序的本征值结果几乎完全重合，从而保证了 CLT 程序磁流体线性模拟结果的准确性和可靠性。在接下来考虑高能量粒子效应的

CLT-K 程序模拟中，由于引入了较小的非理想耗散系数来维持程序的数值稳定性，我们使用 CLT 程序对 $\beta_b^c = 8\%$ 的算例进行了一个对照模拟，即设置磁流体模拟的耗散项系数分别为 $D,\ \kappa\&\nu = 10^{-6},\ \eta = 10^{-7}$，结果如图4.15蓝色十字所示，在该耗散系数下，CLT 计算得到的 $m/n = 1/1$ 内扭曲模的线性增长率 ($\gamma = 0.0090\omega_A$) 与 CLT 在理想磁流体条件下的结果 ($\gamma = 0.00924\omega_A$) 差异不大。这部分磁流体模拟 $m/n = 1/1$ 内扭曲模的线性结果也与王胜博士使用最初版本二阶精度中心差分的 CLT 程序得到的结果类似[62,170]，但这里由于我们使用了四阶精度中心差分格式和理想磁流体条件，图4.4中 CLT 得到的线性增长率与 NOVA 程序的结果更加吻合。

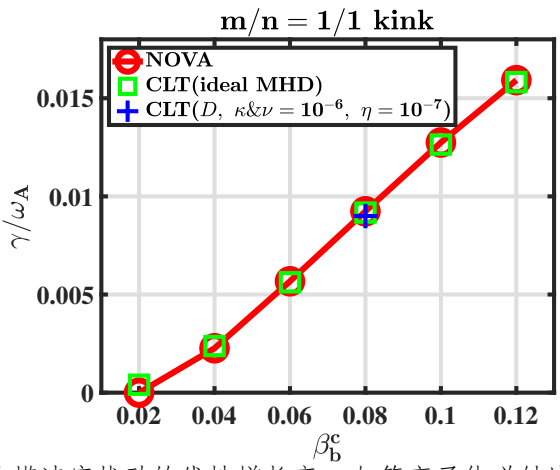

图 4.4　$m/n = 1/1$ 内扭曲模速度扰动的线性增长率 γ 与等离子体磁轴比压 β_h^c 的关系。其中红色圆圈对应 NOVA 程序得到的结果，绿色方框对应 CLT 在理想磁流体条件下得到的结果 ($D,\ \kappa\&\nu = 0,\ \eta = 0$)，蓝色十字对应 CLT 在低耗散系数和电阻率条件下得到的结果 ($D,\ \kappa\&\nu = 10^{-6},\ \eta = 10^{-7}$)。

4.2.2.2　高能量粒子的影响

在上述磁流体模拟结果的基础上，我们进一步引入公式4.17所示的各向同性高能量粒子贡献，来研究高能量粒子对 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性性质的影响。在模拟中，我们忽略扰动磁场 $\delta\mathbf{B}$ 对扰动高能量粒子压强和电流的贡献，而只考虑扰动分布函数 δf 的影响，并设置磁流体模拟的耗散项系数分别为 $D,\ \kappa\&\nu = 10^{-6},\ \eta = 10^{-7}$，以保证程序的数值稳定性。此外，我们保持系统的总等离子体比压不变 ($\beta_{\text{total}}^c = 8\%$)，逐渐提高高能量粒子的比压份额，$\beta_h/\beta_{\text{total}}$ 分别为 0.25，0.50 和 0.75 (对应的 $\beta_b/\beta_{\text{total}}$ 分别为 0.75，0.50 和 0.25)，在不同耦合模型下分别计算 $m/n = 1/1$ 内扭曲模的线性增长率 γ 和频率 ω，其对 $\beta_h/\beta_{\text{total}}$ 的依赖关系如图4.5所示。

当 CLT-K 程序使用与 M3D-K 等压强耦合程序一致的 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合方程时，对应方程4.14，模拟得到的结果如图4.5蓝色十字所示；而 M3D-K 和 NOVA2 程序 (非微扰版本)[167] 计算得到的结果分别如图中枚红色方框和黑色实线所示。可以看到，在 $\beta_h/\beta_{\text{total}} = 0.25$ 时，CLT-K 程序得到的 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性增长率与 M3D-K 和 NOVA2 程序计算得到的结果基本一致，高能量粒子此时主要起致稳作用。但随着 $\beta_h/\beta_{\text{total}}$ 的进一步升高，CLT-K 程序得

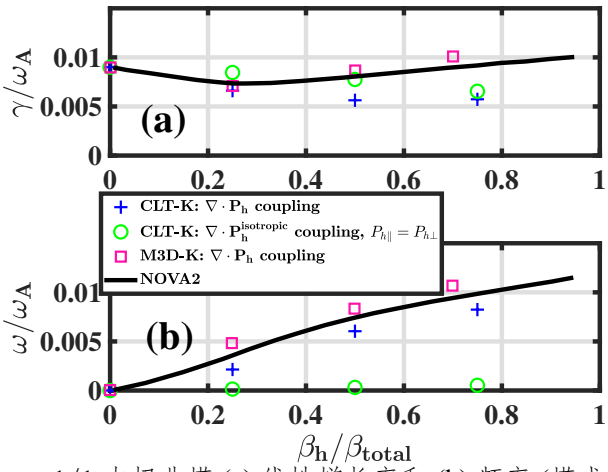

图 4.5 高能量粒子对 $m/n=1/1$ 内扭曲模 (a) 线性增长率和 (b) 频率 (模式在离子抗磁漂移方向旋转) 的影响：蓝色十字表示 CLT-K 程序使用 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合得到的结果；绿色圆圈表示 CLT-K 程序使用各向同性的 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\rm isotropic}$ 耦合，即令 $P_{h\parallel}=P_{h\perp}$ 得到的结果；玫红色方框为 M3D-K 程序使用 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合得到的结果；黑色实线为 NOVA2 程序 (非微扰版本)[167] 得到的结果。其中 M3D-K 和 NOVA2 程序的计算结果取自文献 [Fu et al. 2006][167]，并将其增长率和频率从 M3D-K 和 NOVA2 的 v_A/R_0 归一化转化为 CLT-K 程序的 v_A/a (只需将前者的数值除以 R_0/a 即可)。

到的 $m/n=1/1$ 内扭曲模的线性增长率明显低于 M3D-K 和 NOVA2 程序的计算结果，在 $\beta_h/\beta_{\rm total}$ 较大参数下 ($\gtrsim 0.5$)，CLT-K 程序计算得到高能量粒子对 $m/n=1/1$ 内扭曲模仍起致稳作用，而 M3D-K 和 NOVA2 程序得到的结果显示高能量粒子此时起微弱的去稳作用。在模式的频率方面，三个程序模拟得到的结果较为一致，$m/n=1/1$ 内扭曲模的实频随着 $\beta_h/\beta_{\rm total}$ 的升高基本呈线性增长。整体上来看，CLT-K 程序计算得到的高能量粒子响应后 $m/n=1/1$ 内扭曲模的线性增长率和频率均低于 NOVA2 的计算结果，而 M3D-K 计算得到的线性增长率和频率则略高于 NOVA2，且所有程序中均观察到了高能量粒子对 $m/n=1/1$ 内扭曲模的致稳效应。不同程序计算得到的 $m/n=1/1$ 内扭曲模线性增长率和频率的区别可能来自于不同程序在数值算法上的差异，M3D-K 采用了有限元进行空间离散，而 CLT-K 采用了均匀直角网格中心差分离散，且为了保证程序的数值稳定性，CLT-K 的模拟中引入了电阻率、粘滞等有限的非理想耗散系数。此外，NOVA2 程序只考虑了捕获粒子在零漂移轨道宽度近似下的响应，但 CLT-K 和 M3D-K 程序则包含了所有高能量粒子的贡献以及完整的漂移轨道宽度效应[167]。

在 NIMROD 程序的模拟工作中[168]，Charlson C. Kim 等人考虑了完全各向同性的高能量粒子标量压强 ($\mathbf{P}_h^{\rm isotropic}=P_h\mathbf{I}$) 对 $m/n=1/1$ 内扭曲模线性性质的影响。通过将 CGL 压强张量的平行压强分量和垂直压强分量设置为完全相等 ($P_{h\parallel}=P_{h\perp}$)，可以将 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合项简化为标量压强的梯度 ∇P_h，从而使得高能量粒子的动理学模拟结果退化到理想磁流体的模拟结果，即高能量粒子比压增加对 $m/n=1/1$ 内扭曲模线性增长率影响不大，且 $m/n=1/1$ 内扭曲模的实频消失。在 CLT-K 程序中，我们重复了这一结果，如图4.5绿色圆圈所示。在使用各向同性的标量高能量粒子压强后，CLT-K 程序计算得到的 $m/n=1/1$

内扭曲模线性增长率随 $\beta_h/\beta_{\text{total}}$ 的升高有较小幅度的下降，而模式的频率几乎为零。这部分结果也与 NIMROD 程序基本一致，验证了高能量粒子压强张量的各向异性对磁流体模式线性稳定性和频率的重要影响。$m/n=1/1$ 内扭曲模线性增长率的下降可能与高能量粒子速度空间采用的慢化分布有关，更细致的分析需要对高能量粒子的分布函数做系统性的扫描研究。

4.3 高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响

在本节 CLT-K 程序的模拟工作中，我们会分别讨论不同分布函数的高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模稳定性的影响，并使用不同形式的耦合方式检验其对线性模拟结果的影响。进一步，我们结合 $m/n=2/1$ 撕裂模的数值模拟结果和高能量粒子对系统扰动势能的贡献 δW_h 来分析不同分布函数高能量粒子对撕裂模产生的致稳或去稳作用，并分别考虑高能量粒子的非绝热和绝热响应在这一过程中的贡献。

4.3.1 高能量粒子响应 δf 与扰动势能 δW_h

4.3.1.1 绝热响应和非绝热响应

我们可以将高能量粒子由于扰动电磁场产生的扰动分布函数写成两者之和：

$$\delta f=\delta f_{\text{non-adiabatic}}+\delta f_{\text{adiabatic}}. \tag{4.18}$$

其中，非绝热响应 $\delta f_{\text{non-adiabatic}}$ 满足[64]：

$$\begin{aligned}\frac{d\delta f_{\text{non-adiabatic}}}{dt}&=\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\delta L}{\partial t}-\frac{\partial f_0}{\partial P_\varphi}\frac{\partial\delta L}{\partial\varphi}\\&=-i\left(\omega-n\omega_*\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\delta L,\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\delta L=\frac{Z_h e}{c}\delta\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{X}}-Z_h e\delta\phi-\mu\delta B+\mathcal{O}\left(\delta\right). \tag{4.20}$$

其中 f_0 为高能量粒子平衡分布函数，$\omega_*=\dfrac{\partial f_0/\partial P_\varphi}{\partial f_0/\partial\varepsilon}$，与公式2.48中的 ω_* 意义相同，包含高能量粒子空间分布的不均匀性对波的驱动强度，δL 为扰动的拉格朗日量。将扰动场和 δL 写成在时间和环向的傅里叶展开形式，即 $\delta\sim\exp[-i\omega\tau+in\varphi\left(\tau\right)]$，引入环向轨道频率 ω_φ 和极向轨道频率 ω_θ，并对公式4.19对时间 τ 积分，得到高能量粒子非绝热响应的形式：

$$\delta f_{\text{non-adiabatic}}=\left(\omega-n\omega_*\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\sum_{p=-\infty}^{\infty}Y_p\left(\varepsilon,\mu,P_\varphi;\sigma\right)\frac{\exp\left[-i\left(\omega-n\omega_\varphi+p\omega_\theta\right)t\right]}{\omega-n\omega_\varphi+p\omega_\theta}. \tag{4.21}$$

其中 $Y_p\left(\varepsilon,\mu,P_\varphi;\sigma\right)$ 为不同 p 的傅里叶系数。可以看到，公式4.21中的高能量粒子非绝热响应包含了波和粒子的共振条件，且形式与第2.1.2节的公式2.7一致，即 $\omega-n\omega_\varphi+p\omega_\theta=0$。此外，公式4.18中高能量粒子的绝热响应可以写成[64]：

$$\delta f_{\text{adiabatic}}=\delta P_\varphi\frac{\partial f_0}{\partial P_\varphi}+Z_h e\delta\phi\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}-\mu\frac{\delta B}{B}\frac{\partial f_0}{\partial\mu}. \tag{4.22}$$

高能量粒子的绝热响应 $\delta f_{\text{adiabatic}}$ 主要为与背景等离子体类似的流体响应。在忽略高能量粒子轨道宽度的情况下，公式4.22可以近似写成 $\delta f_{\text{adiabatic}} = -\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla f_0$，本论文的 CLT-K 程序模拟工作中，我们对 $\delta f_{\text{adiabatic}}$ 采用该近似方式进行处理。其中，等离子体位移 $\boldsymbol{\xi}\,(=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ 在线性问题中可以通过对速度积分近似得到，即 $\boldsymbol{\xi}\,(\mathbf{x},\,t)\simeq\int_0^t\mathbf{v}\,(\mathbf{x},\,\tau)\,d\tau$。从而我们在模拟中可以 (近似) 单独考虑高能量粒子的绝热响应的贡献，即 $\delta f_{\text{non-adiabatic}} = \delta f - \delta f_{\text{adiabatic}}$。

4.3.1.2 能量原理分析

在理想磁流体不稳定性问题中，可以利用能量原理分析不同不稳定性的线性性质。通过将理想磁流体方程2.9-2.13线性化，并将所有扰动量写成等离子体位移 $\boldsymbol{\xi}$ 的函数，从而可以将动量方程2.10写成：

$$-\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi} - F\,(\boldsymbol{\xi}) = 0, \tag{4.23}$$

对公式4.23乘以 $\boldsymbol{\xi}^*$ 并积分 $\frac{1}{2}\int dx^3$，即得到能量守恒方程：

$$\delta I + \delta W_{\text{MHD}} = 0, \tag{4.24}$$

其中，第一项和第二项分别对应扰动位移 $\boldsymbol{\xi}$ 导致的动能 $\delta I = -\frac{1}{2}\omega^2\int\rho_0\,|\boldsymbol{\xi}|^2\,dx^3$ 和理想磁流体势能 $\delta W_{\text{MHD}} = -\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\xi}^*\cdot F\,(\boldsymbol{\xi})\,dx^3$ 变化。对于任意等离子体位移 $\boldsymbol{\xi}$，如果扰动势能 $\delta W_{\text{MHD}} < 0$，则系统的扰动动能会产生增长 ($\omega^2 < 0$，对应增长率 $\gamma > 0$)，即该系统存在 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的不稳定性。只考虑等离子体内部的扰动势能，则 δW_{MHD} 的表达式可以写成[197]：

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{MHD}} = \ & \frac{1}{2}\int dx^3[(4\pi)^{-1}\,\delta B_\perp^2 + (4\pi)^{-1}\,B_0^2\,|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2 + \Gamma p_0\,|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2 \\ & -c^{-1}J_{\|0}\,(\boldsymbol{\xi}^*\times\mathbf{b_0})\cdot\delta\mathbf{B}_\perp - 2\,(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla p_0)\,(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{\kappa})].\end{aligned} \tag{4.25}$$

其中，$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}$ 为磁场曲率。公式4.25右端前三项均大于零，分别对应磁力线弯曲 (剪切阿尔芬波)、等离子体与磁力线压缩 (压缩阿尔芬波) 以及等离子体自身的可压缩性 (声波) 产生的致稳效应，第四项对应平行电流产生的去稳效应，对应扭曲模 (kink) 不稳定性，第五项对应由压强梯度和磁场坏曲率共同导致的交换模 (interchange) 和气球模 (balloning) 不稳定性。

在此基础上，我们考虑高能量粒子对扰动势能的贡献 δW_h，公式4.24变为：

$$\delta I + \delta W_{\text{MHD}} + \delta W_h = 0, \tag{4.26}$$

其中，以压强耦合方程4.10为例，δW_h 满足：

$$\begin{aligned}\delta W_h &= -\frac{1}{2}\int dx^3\boldsymbol{\xi}^*\cdot[-(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp] \\ &= \frac{1}{2}\int dx^3\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot\left[\nabla_\perp\delta P_{h\perp} + \left(\delta P_{h\|} - \delta P_{h\perp}\right)(\nabla\times\mathbf{b})\times\mathbf{b}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int dx^3\left[(\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot\boldsymbol{\kappa})\left(\delta P_{h\|} - \delta P_{h\perp}\right) + \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot\nabla_\perp\delta P_{h\perp}\right].\end{aligned} \tag{4.27}$$

对电流耦合方程4.11，只需将公式4.27的被积分项 $-(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 替换为 $-\delta\mathbf{J}_h\times\mathbf{B}$，即可得到与公式4.27一致的 δW_h 表达式，类似的推导在陈文明博士的工作中也有介绍[198]。进一步，根据第4.3.1.1节介绍的高能量粒子的非绝热响应以及绝热响应，我们将 δW_h 分为 $\delta W_{h,\text{ non-adiabatic}}$ 和 $\delta W_{h,\text{ adiabatic}}$，其中高能量粒子扰动压强张量 $\delta\mathbf{P}_{h,\text{ non-adiabatic}}$ 和 $\delta\mathbf{P}_{h,\text{ adiabatic}}$ 分别来自于对高能量粒子的 $\delta f_{\text{non-adiabatic}}$ 和 $\delta f_{\text{adiabatic}}$ 的积分[a]。

公式4.24和4.26对应的能量原理色散关系均针对理想背景等离子体的情况，即不考虑电阻以及粘滞、热导和耗散等非理想效应。对于包含有限电阻率情况下的捕获高能量粒子共振激发鱼骨模不稳定性问题，Hamid Biglari 和陈骝教授通过考虑有理面 r_s 上电阻层的动量方程和非理想欧姆定律 $[\delta\mathbf{B}=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B})-(\eta c^2/4\pi i\omega)\nabla^2\delta\mathbf{B}]$ 给出了包含有限电阻率效应和高能量粒子贡献的更一般性能量原理色散关系[200]，其用 $2\pi R_0\left(B_0r_s/2R_0\right)^2|\xi_{r0}|^2$ 归一化后的形式 $(\delta\hat{W})$ 可以写成：

$$\delta\hat{W}_{\text{MHD}}+\delta\hat{W}_h+\delta\hat{W}_R=0, \tag{4.28}$$

$$\delta\hat{W}_R=8S_M^{-1/3}\Omega^{-5/4}\frac{\Gamma\left[\left(\Omega^{3/2}+5\right)/4\right]}{\Gamma\left[\left(\Omega^{3/2}-1\right)/4\right]}, \tag{4.29}$$

其中，$\delta\hat{W}_R$ 来自于电阻层的贡献，$S_M=\tau_R/\tau_A$，$\tau_R=4\pi r_s^2/\eta c^2$，$\Omega=S_M^{1/3}\left(-i\omega\right)/\omega_A$，此处 $\Gamma(z)$ 为伽玛函数。此外，张小西博士等人利用该色散关系在考虑电阻层的情况下，讨论了捕获高能量粒子对 $m/n=2/1$ EPM (原文中称为类鱼骨模) 的激发机制，包括线性增长率和频率对电阻、磁剪切和 $\delta\hat{W}_{\text{MHD}}$ 的依赖关系等[199]。

在本节的工作中，我们将使用 CLT-K 程序模拟不同分布函数高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响。为理解其去稳或者致稳机制，我们将数值计算高能量粒子响应 δf 对系统扰动势能 δW_h 产生的影响，并进一步结合第4.3.1.1节的内容，分别讨论不同分布函数高能量粒子的非绝热 $\delta f_{\text{non-adiabatic}}$ 和绝热响应 $\delta f_{\text{adiabatic}}$ 对撕裂模线性稳定性的影响。

4.3.2 模拟参数和撕裂模定标率

本节 CLT-K 程序的模拟工作主要采用文献 [Cai and Fu 2012][193] 中的平衡位型和高能量粒子分布函数。PIC 模拟中，对高能量粒子采用具有定向投掷角分布的各向异性慢化分布函数：

$$f_0\propto\frac{1}{v^3+v_c^3}\left[1+\text{erf}\left(\frac{v_0-v}{\Delta v}\right)\right]\exp\left(-\frac{\langle\psi\rangle}{\Delta\psi}\right)\exp\left[-\left(\frac{\Lambda-\Lambda_0}{\Delta\Lambda}\right)^2\right], \tag{4.30}$$

其中，截止速度 $v_0=0.5v_A$，临界速度 $v_c=0.58v_0$，$\Delta v=0.2v_A$，投掷角 $\Lambda_0=0$ (通行粒子)，$\Lambda_0=1$ (捕获粒子)，$\Delta\Lambda=\sqrt{0.3}=0.548$[193]，$\langle\psi\rangle$ 为沿粒子轨道平均后的极向磁通，$\Delta\psi=0.40\left(\psi_{max}-\psi_{min}\right)$，垂直速度为 v_0 的高能量粒子的拉莫尔轨道半径 ϱ_h 为 $0.07a$。磁轴处高能量粒子比压 β_h^c 的取值范围为 $0.154\%\sim1.54\%$。

[a]部分论文会将高能量粒子的绝热贡献 $\delta W_{h,\text{ adiabatic}}$ 归到 δW_{MHD} 中，并记为 δW_c 或 δW_{min} 等[199]，本论文中，δW_h 包含了高能量粒子的所有响应。

初始平衡我们考虑零比压近似 ($\beta_b = 0$) 的均匀密度托卡马克等离子体分布，环径比为 $R_0/a = 5.76$，平衡文件来自于 QSOLVER 程序[185]，平衡的安全因子径向分布如图4.6所示。根据文献 [Hegna and Callen 1994][60] 中的撕裂模线性理论，撕裂模的线性稳定性可以根据撕裂模不稳定性指数 Δ' (tearing mode instability index) 进行判断，在 $\beta = 0$ 近似下，有：

$$\Delta' = -2m\sqrt{\bar{g}^{\chi\chi}}\lambda\pi\cot(\lambda\pi), \tag{4.31}$$

其中：

$$\lambda = -\frac{RB_\varphi q\mu_0\bar{\sigma}'}{2mq'}\frac{1}{\sqrt{\bar{g}^{\chi\chi}\bar{g}^{\psi\psi}}}, \tag{4.32}$$

并有 $\sigma = J_\parallel/B$，$g^{ii} = \nabla i\cdot\nabla i$, $(i = \chi, \psi)$，χ 为广义极向角，$\bar{f}$ 表示极向平均。通过公式4.31和4.32我们可以计算出该平衡位型对应的 $m/n = 2/1$ 撕裂模的 Δ' 约为 14.8，因此该平衡位型下 $m/n = 2/1$ 的撕裂模是不稳定的。对于有高能量粒子的混合模拟算例，我们采用 $\eta = 10^{-5}$ 的均匀空间分布电阻率，并采用较小的粘滞和热导等非理想耗散系数，即 D, κ& $\nu = 10^{-8}$。磁流体部分采用 $\{R, \varphi, Z\}$ 方向 $200\times16\times200$ 的均匀网格，PIC 部分采用 1000 万标记粒子，保证磁流体部分和 PIC 部分程序的数值收敛性。

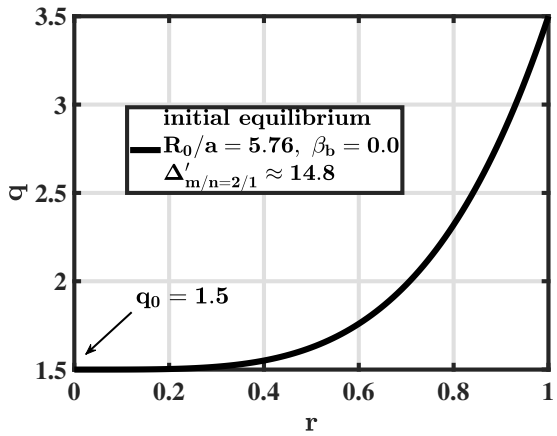

图 4.6 初始平衡安全因子 q 的径向分布。

首先，我们使用 CLT 程序扫描 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性增长率对电阻率的依赖关系，结果如图4.7所示。可以看到，当模拟采用的电阻率较小时 ($10^{-7} \le \eta \le 10^{-6}$)，撕裂模线性增长率和电阻率的依赖关系为 $\gamma \propto \eta^{0.64}$，这与理论预测的定标率 $\gamma \propto \eta^{3/5}$ 十分接近[201]。而随着电阻率的进一步升高，CLT 模拟得到的撕裂模增长率和电阻率的依赖关系逐渐减弱，在电阻率为 $10^{-7} \le \eta \le 10^{-5}$ 区间内，定标率大约为 $\gamma \propto \eta^{0.52}$，而在电阻率为 $10^{-7} \le \eta \le 10^{-4}$ 区间内，定标率大约为 $\gamma \propto \eta^{0.43}$。在高电阻率条件下，定标率与解析结果的偏差可能是由于高电阻率导致撕裂模电阻层 (resistive layer) 宽度增大 $w \propto (\tau_A/\tau_R)^{2/5} \propto \eta^{2/5}$[26]，使得计算内区解时所使用的常磁通近似失效造成的。类似的撕裂模定标率随电阻率增大而减小的趋势在 CLT 和 M3D-C1 程序的非线性校验工作中也有被观察到[184]。

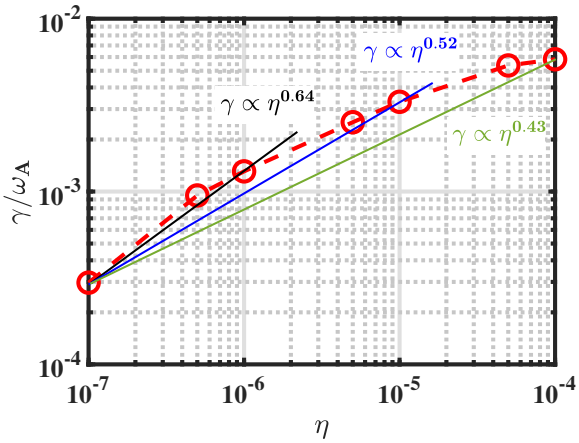

图 4.7　CLT 程序模拟得到的 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性增长率和电阻率的依赖关系。不同电阻率区间的增长率和电阻率的定标率分别用不同颜色的实线标出，黑色：$10^{-7} \le \eta \le 10^{-6}$，$\gamma \propto \eta^{0.64}$；蓝色：$10^{-7} \le \eta \le 10^{-5}$，$\gamma \propto \eta^{0.52}$；绿色：$10^{-7} \le \eta \le 10^{-4}$，$\gamma \propto \eta^{0.43}$。

针对第4.1节中讨论的不同磁流体-动理学耦合方式，我们分别考虑：i. 忽略完整高能量粒子惯性项情况下的 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合方式；ii. 只忽略高能量粒子垂直惯性项情况下的 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合方式[a]。此外，我们分别考虑同向通行、反向通行和捕获高能量粒子分布函数的绝热和非绝热响应各自对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响，并将 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合模拟得到的结果与文献 [Cai and Fu 2012][193] 中 M3D-K 的结果做对照，讨论 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合与 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合模拟得到结果的异同。在这部分模拟工作中，为简便起见，我们暂时只考虑高能量粒子扰动分布函数 δf 贡献的 $n = 1$ 分量的扰动压强 $\delta\mathbf{P}_h$ 或扰动电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 的影响。此外，在 M3D-K 程序的模拟工作中，采用的电阻率为 $\eta = 3.47\times10^{-5}$[b]，而在 CLT-K 程序关于高能量粒子对撕裂模线性稳定性影响的模拟，我们均采用 $\eta = 10^{-5}$ 的电阻率。

4.3.3　不同分布函数高能量粒子的线性模拟结果

4.3.3.1　同向通行高能量粒子

首先，我们考虑同向通行的高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模的影响。模拟参数与第4.3.2节相同，其中投掷角 $\Lambda_0 = 0$，并在慢化分布函数4.30中只考虑 $v_\parallel > 0$ 的同向通行高能量粒子 (速度方向与环向电流和环向磁场方向一致)。在较低 β_h^c 下 ($\beta_h^c \lesssim 1.2\%$)，系统中主导的模式为低频的 $m/n = 2/1$ 撕裂模，如图4.8所示。

图4.8 (a) 和 (b) 中的模拟采用了与 M3D-K 程序一致的 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 压强耦合方程4.14，从图 (a) 可以看到，在使用 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 压强耦合模拟得到的结果中，同向通行高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模的响应 (同时包含绝热和非绝热响应) 主要对 $m/n = 2/1$ 撕裂模起一定的致稳作用；随着 β_h^c 的增加，$m/n = 2/1$ 撕裂模的线性增长呈下降趋势。当我们在模拟中去除高能量

[a] 第4.1节中已证明：在忽略粒子垂直方向各向异性的情况下，CGL 表述的 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合与 $\mathbf{J}_h$ 耦合在解析和数值上均严格等价，因此下文的工作中均给出 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合的模拟结果，$\mathbf{J}_h$ 耦合的结果与之完全相同。

[b] 文献 [Cai and Fu 2012][193] 中电阻率为 $\eta = 2\times10^{-4}\mu_0 v_A a^2/R_0$，转换到 CLT-K 程序的归一化下即为 $\eta = 3.47\times10^{-5}\mu_0 v_A a$。

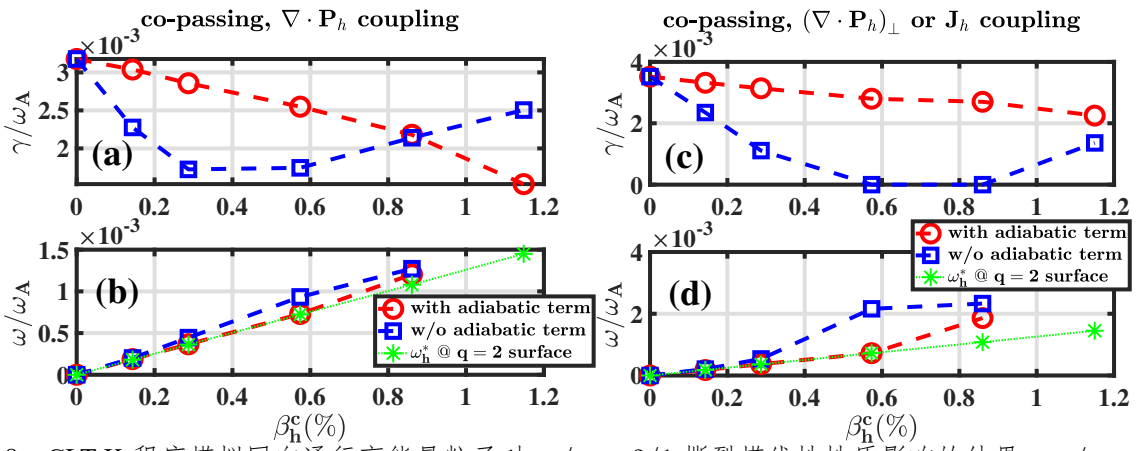

图 4.8 CLT-K 程序模拟同向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性性质影响的结果：$m/n=2/1$ 撕裂模的 (上) 线性增长率和 (下) 频率 (模式在离子抗磁漂移方向旋转) 与同向通行高能量粒子磁轴比压 β_h^c 的依赖关系。红色圆圈和蓝色方框分别表示包含和不包含高能量粒子绝热响应的结果，绿色星号表示 $q=2$ 有理面上高能量粒子的离子抗磁漂移频率 ω_h^*。(b) 中 $\beta_h^c=1.15\%$ 点 $m/n=2/1$ 模式的频率跳变到 EPM 的频率 ($\omega\approx-0.024\omega_A$)，由于此频率值过高，未在该图中未标出。(a) 和 (b) 为 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合模拟结果，(c) 和 (d) 为 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟结果，与 $\mathbf{J}_h$ 耦合模拟结果相同。

粒子的绝热响应 $\delta f_{\text{adiabatic}}$ 之后，撕裂模的增长率整体上呈更加明显的下降趋势，说明在本算例中，同向通行高能量粒子的绝热响应主要对撕裂模起去稳作用，而非绝热响应对撕裂模主要起致稳作用。在图4.8 (a) 中，当同向通行高能量粒子的 β_h^c 超过一定阈值 ($\sim 0.4\%$) 之后，非绝热响应导致撕裂模的增长率有一定程度回升，甚至超过考虑绝热响应情况下的撕裂模增长率，该趋势也与文献 [Cai and Fu 2012][193] 中的结果一致。同向通行高能量粒子导致撕裂模在离子抗磁漂移方向存在有限的低频旋转，如图4.8 (b) 所示。随着 β_h^c 的增加，$m/n=2/1$ 撕裂模的频率线性上升，其频率幅值接近 $q=2$ 有理面处 (r_s) 的高能量粒子的离子抗磁漂移频率 $\omega_h^*=(dP_h/dr)/(nqB_0r_s)$，见图4.8 (b) 绿色星号。而高能量粒子的绝热响应对 $m/n=2/1$ 的撕裂模线性阶段的频率影响不大。

图4.8 (c) 和 (d) 所展示的模拟中采用更自洽的 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 形式的压强耦合方程4.10。定性上，该模拟结果与图4.8中 (a) 和 (b) 对应的 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 压强耦合模拟结果一致，包括同向通行高能量粒子的非绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模主要起致稳作用，其绝热响应则起去稳作用，撕裂模的频率也基本接近高能量粒子的离子抗磁漂移频率。然而，图4.8 (c) 中，同向通行高能量粒子的非绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模起更强的致稳作用，在 $\beta_h^c=0.6\%\sim0.86\%$ 范围内，撕裂模均被完全致稳。与此同时，同向通行高能量粒子的绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模的去稳作用也相对更加明显。

4.3.3.2 反向通行高能量粒子

这一节我们考虑反向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响，模拟参数与第4.3.2节相同，其中投掷角 $\Lambda_0=0$，并在慢化分布函数4.30中只考虑 $v_\parallel<0$ 的反向通行高能量粒子 (速度方向与环向电流和环向磁场方向相反)。

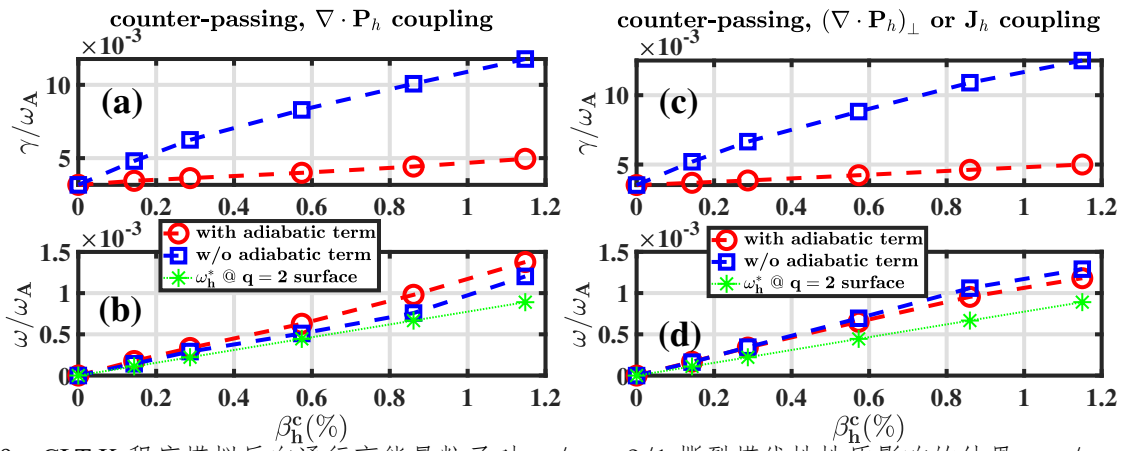

图 4.9　CLT-K 程序模拟反向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性性质影响的结果：$m/n=2/1$ 撕裂模的 (上) 线性增长率和 (下) 频率 (模式在离子抗磁漂移方向旋转) 与反向通行高能量粒子磁轴比压 β_h^c 的依赖关系。红色圆圈和蓝色方框分别表示包含和不包含高能量粒子绝热响应的结果，绿色星号表示 $q=2$ 有理面上高能量粒子的离子抗磁漂移频率 ω_h^*。(a) 和 (b) 为 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 耦合模拟结果，(c) 和 (d) 为 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟结果，与 $\mathbf{J}_h$ 耦合模拟结果相同。

在较低高能量粒子比压 β_h^c 下 ($\beta_h^c \lesssim 1.2\%$)，系统中主导的模式为低频的 $m/n=2/1$ 撕裂模，如图4.9所示。可以看到，对于反向通行高能量粒子，$\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 形式的压强耦合与 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 形式的压强耦合模拟结果十分接近，包括增长率和频率的幅值以及对 β_h^c 的依赖关系等。以图4.9 (a) 结果为例，反向通行高能量粒子的非绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模起强烈的去稳作用，如图 (a) 中蓝色方框所示，其增长率高能量粒子比压 β_h^c 呈线性正相关关系。而反向通行高能量粒子的绝热响应则对 $m/n=2/1$ 撕裂模起明显的致稳作用，如图4.9 (a) 中红色圆圈所示。在考虑高能量粒子的绝热响应之后，$m/n=2/1$ 撕裂模的增长率随 β_h^c 的增加仅有非常微弱的提高，并远小于只考虑高能量粒子的非绝热响应情况下的增长率。与同向通行高能量粒子情况类似，反向通行高能量粒子的绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模的频率影响很小，$m/n=2/1$ 撕裂模的频率基本与 $q=2$ 有理面处高能量粒子引起的离子抗磁漂移频率 ω_h^* 一致。这部分关于反向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性稳定性影响的模拟结果与文献 [Cai and Fu 2012][193] 一致，同时该模拟结果也说明反向通行高能量粒子与 $m/n=2/1$ 撕裂模相互作用过程中，前者的平行惯性项 $\partial\left(\rho_h v_{h\parallel}\right)/\partial t$ 对模拟结果影响较小，至少在 $m/n=2/1$ 撕裂模的线性阶段可以忽略。

4.3.3.3　捕获高能量粒子

对于捕获高能量粒子，我们采用较局域的投掷角分布函数，即 $\Lambda_0=1.0$，$\Delta\Lambda=\sqrt{0.3}$，在该参数下，高能量粒子主要集中分布在 (临界) 捕获粒子范围内。该参数选取与文献 [Cai and Fu 2012] 有所不同，后者使用了较宽的投掷角分布，即 $\Lambda_0=1.0$，$\Delta\Lambda=10$，在这种情况下，高能量粒子分布函数对投掷角的依赖很弱，因此速度空间更趋近于各向同性分布。因此，在本节的模拟工作中，我们仅考虑 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 形式的压强耦合方程4.10。

图4.10展示了 $m/n=2/1$ 撕裂模线性增长率和频率对捕获高能量粒子 β_h^c 的依赖关系。

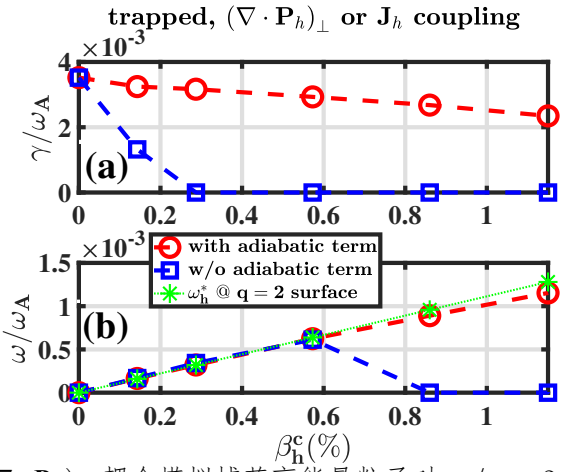

图 4.10 CLT-K 程序使用 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟捕获高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性性质影响的结果 (与 $\mathbf{J}_h$ 耦合模拟结果相同)：$m/n=2/1$ 撕裂模的 (a) 线性增长率和 (b) 频率 (模式在离子抗磁漂移方向旋转) 与反向通行高能量粒子磁轴比压 β_h^c 的依赖关系。红色圆圈和蓝色方框分别表示包含和不包含高能量粒子绝热响应的结果，绿色星号表示 $q=2$ 有理面上高能量粒子的离子抗磁漂移频率 ω_h^*。

如图4.10 (a) 红色圆圈所示，捕获高能量粒子的响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模整体起较弱的致稳作用，$m/n=2/1$ 撕裂模增长率对捕获高能量粒子比压 β_h^c 的依赖关系与同向通行高能量粒子的模拟结果较为接近 [图4.8 (c)]。图4.10 (a) 蓝色方框结果则说明捕获高能量粒子的非绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模起到非常强的致稳作用，即绝热响应起显著的去稳作用。特别是在 $\beta_h^c\gtrsim0.3\%$ 之后，如果不考虑绝热响应，捕获高能量粒子的非绝热响应可以完全抑制 $m/n=2/1$ 撕裂模的增长。$m/n=2/1$ 撕裂模的旋转频率和方向与 $q=2$ 有理面的高能量粒子离子抗磁漂移频率几乎完全一致，如图4.10 (b) 所示。但对于只考虑捕获高能量粒子非绝热响应的情况，在 $\beta_h^c\gtrsim0.8\%$ 之后，$m/n=2/1$ 撕裂模的频率也几乎完全消失，且在扰动电场的极向分布上未观察到典型的 $m/n=2/1$ 撕裂模模结构。因此，相比于通行高能量粒子，捕获高能量粒子的非绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模存在更显著的致稳效应。关于不同分布函数高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性稳定性产生的影响，我们将在下一节内容进一步分析讨论。

4.3.4 高能量粒子对撕裂模的致稳或去稳机制

蔡辉山教授等人证明，在撕裂模线性阶段，通行高能量粒子的非绝热响应会改变理想区的扰动平行等离子体电流，从而影响撕裂模的不稳定性指数 Δ' 和线性稳定性[202]，即：

$$\Delta'=-\frac{\pi\alpha}{r_s}\cot\left[\pi\left(\sqrt{m^2+\alpha}\right)-m\right],\tag{4.33}$$
$$\alpha=\frac{q^2(r_s)}{a/R_0}\left[\frac{dq(r_s)}{dr}\right]^{-1}\left(-\frac{dJ_{\|0}}{dr}+\sum_\sigma\frac{\sigma\chi_0}{\varrho_{hm}}\frac{d\beta_h^\sigma}{dr}\right),$$

其中，ϱ_{hm} 为最大能量高能量粒子的拉莫尔回旋半径，$\chi_0<1$ 表示耦合强度，$\sigma=\pm1$ 分别表示通行高能量粒子的同向或反向运动速度方向。在托卡马克常规参数下，$dJ_{\|0}/dr<0$，

$d\beta_h/dr < 0$，因此同向通行高能量粒子 ($\sigma = +1$) 倾向于抵消背景等离子体电流径向梯度的贡献，从而减小撕裂模的 Δ' 并产生致稳效应；而反向通行高能量粒子 ($\sigma = -1$) 则会增大 Δ'，对撕裂模产生去稳作用。在 CLT-K 的结果中，由于 PIC 模拟引入较大的数值噪声，因此无法准确地分析 $q = 2$ 有理面两侧理想区域的高能量粒子扰动电流和压强，以及高能量粒子对背景等离子体电流和撕裂模 Δ' 产生的影响。为了理解不同分布函数高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模产生的致稳或者去稳效应，我们针对 CLT-K 使用 $(\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合的模拟结果从等离子体流场以及高能量粒子响应产生的扰动势能 δW_h 进行分析。

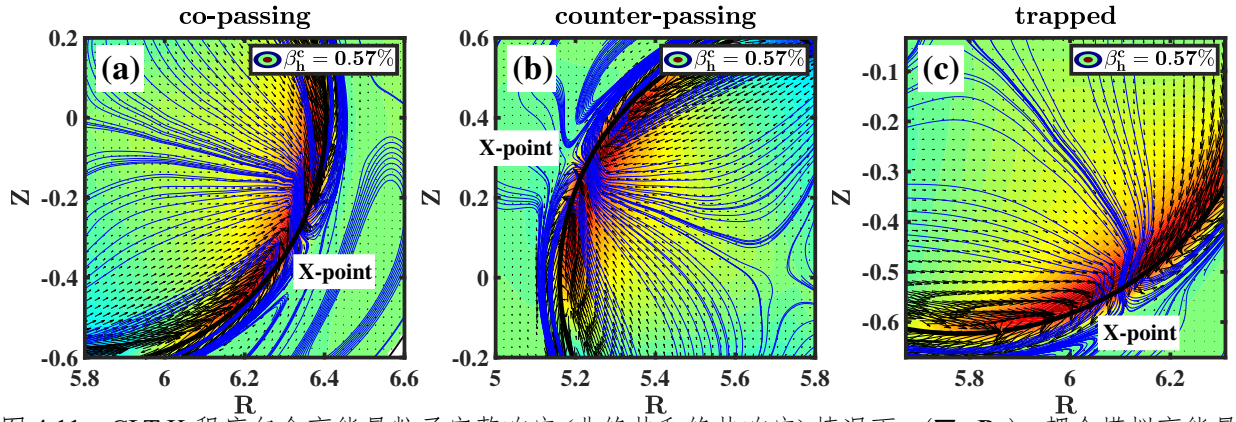

图 4.11　CLT-K 程序包含高能量粒子完整响应 (非绝热和绝热响应) 情况下，$(\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性性质影响的结果 ($\beta_h^c = 0.57\%$，$t = 2991.2\tau_A$，$\varphi = 0$ 截面)：等高图颜色表示径向流 v_r 在不同区域的相对强度，蓝色实线为极向流线，黑色箭头为流场，黑色实线为 $q = 2$ 有理面，‘X-point’ 标出了 $m/n = 2/1$ 撕裂模的一个 X 点。分别对应：(a) 同向通行高能量粒子；(b) 反向通行高能量粒子；(c) 捕获高能量粒子。

首先，在考虑高能量粒子完整响应的情况下 (包括非绝热和绝热响应)，对应图4.8-4.10中红色圆圈所绘结果，图4.11中分别给出了 $\beta_h^c = 0.57\%$ 的同向通行、反向通行和捕获高能量粒子作用下，$m/n = 2/1$ 撕裂模线性阶段 X 点附近的流场分布 (主要关注 $q = 2$ 有理面内侧)。对于同向通行高能量粒子，图4.11 (a) 画出了弱场侧 X 点附近的流场分布。可以看到，等离子体芯部的速度流在接近 $q = 2$ 有理面之前产生了接近 $90°$ 的偏转，导致撕裂模 X 点处的径向流分量 v_r 很小，而由平行于磁面的切向流 v_p 占据主导。根据经典的 Sweet-Parker 磁场重联图像[101]，磁场重联率主要由 X 点上游的垂直于有理面的入流速度 (此处为 v_r) 决定，X 点等离子体径向流则主要来自于等离子体扰动电流 $\delta\mathbf{J}$ 和平衡磁场 $\mathbf{B}_0$ 产生的洛伦兹力，而同向通行高能量粒子对等离子体扰动电流分布的改变在较大程度上影响了重联区上游的等离子体流场。图4.11 (a) 中 X 点等离子体切向流的增强和径向流减小也与图4.8 (c) 的模拟结果一致，即同向通行高能量粒子对撕裂模产生致稳效应。图4.11 (b) 给出了反向通行高能量粒子响应导致的强场侧 X 点附近撕裂模流场分布。该情况下，$q = 2$ 有理面内侧的等离子体流在到达撕裂模 X 点前仍有一定程度的偏转，但偏转幅度远小于图4.11 (a) 的同向通行高能量粒子情况。图4.9 (c) 的结果显示反向通行高能量粒子对撕裂模

有一定程度的去稳效应，但由于撕裂模 X 点上游的等离子体流场在极向仍存在一定幅值的切向分量，因此，为理解反向通行高能量粒子的去稳机制，还需要结合高能量粒子响应产生的扰动势能 δW_h 做更深入的分析。与此同时，图4.11 (c) 中捕获高能量粒子导致撕裂模 X 点附近的入流也有较为明显的极向偏转，但偏转程度介于同向通行高能量粒子和反向通行高能量粒子之间。根据图4.10 (a) 的撕裂模线性增长率模拟结果，捕获高能量粒子对撕裂模起到较弱的致稳作用，该结果与图4.11 (c) 中撕裂模 X 点的流场分布定性吻合。

其次，我们在只考虑高能量粒子的非绝热响应 $\delta f_{\text{non-adiabatic}}$ 的情况下，分析不同分布函数高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性阶段流场演化的影响，结果如图4.12所示。首先，对于同向通行高能量粒子，图4.8 (c) 蓝色方框结果显示，在 $\beta_h^c = 0.57\%$ 情况下，$m/n = 2/1$ 撕裂模几乎被高能量粒子的非绝热响应完全致稳。相对应的，图4.12 (a) 中，同向通行高能量粒子的非绝热响应导致等离子体流场趋于随机化，特别是在 $q = 2$ 有理面内侧，等离子体极向流存在很强的径向反剪切分布，而在磁岛 X 点附近，几乎不存在垂直于有理面的径向分量。由于有理面附近的亚阿尔芬强剪切流对撕裂模 (磁重联) 有很强的抑制作用[203,204]，因而撕裂模被几乎完全致稳。

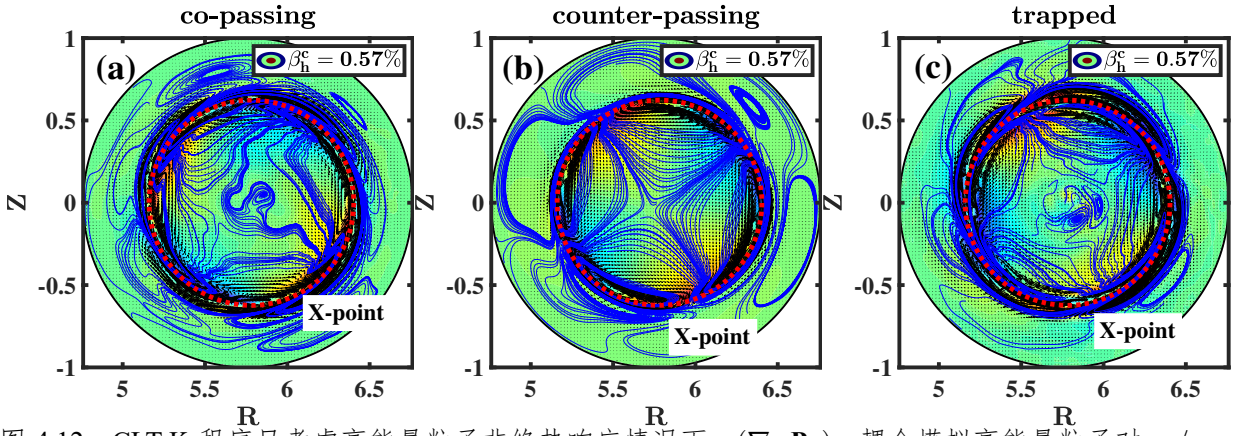

图 4.12 CLT-K 程序只考虑高能量粒子非绝热响应情况下，$(\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性性质影响的结果 ($\beta_h^c = 0.57\%$，$t = 1246.3$，$\varphi = 0$ 截面)：等高图颜色表示径向流 v_r 在不同区域的相对强度，蓝色实线为极向流线，黑色箭头为流场，红色虚线为 $q = 2$ 有理面，‘X-point’ 标出了 $m/n = 2/1$ 撕裂模的一个 X 点。分别对应：(a) 同向通行高能量粒子；(b) 反向通行高能量粒子；(c) 捕获高能量粒子。

类似的情况也存在于图4.12 (c) 所示的捕获高能量粒子模拟结果中。由于捕获高能量粒子的有限轨道宽度效应，等离子体径向流最大位置严重偏离 $q = 2$ 有理面，在有理面内外两侧呈现明显的等离子体剪切流分布。在该流场分布下，$m/n = 2/1$ 撕裂模难以增长，因此同样被捕获高能量粒子完全致稳，如图4.10 (a) 蓝色方框结果所示。相比之下，反向通行高能量粒子的非绝热响应对 $m/n = 2/1$ 撕裂模起强烈的去稳作用，如图4.9 (c) 蓝色方框结果所示。因此，反向通行高能量粒子非绝热响应作用下，$m/n = 2/1$ 撕裂模的等离子体流场全局仍呈现非常好的四极对称分布，如图4.12 (b) 所示。在 $q = 2$ 有理面撕裂模的

X 点附近，等离子体流场在极向仍有一定程度的偏转，但仍以径向流分量 v_r 为主。其中，在 $q=2$ 有理面 X 点内侧，主要为径向向外的入流分量，而在 O 点内侧则主要为出流分流，而等离子体径向流速最强的位置基本位于 $q=2$ 有理面上，图4.12 (b) 的结果与不考虑高能量粒子影响下的传统撕裂模情况类似。

为进一步理解高能量粒子对撕裂模稳定性产生的影响，我们在图4.13和4.14中分析高能量粒子响应贡献的 δW_h。首先对于高能量粒子的绝热响应项贡献，我们对包含高能量粒子完整响应 (非绝热和绝热响应) 的模拟结果单独提取出高能量粒子绝热响应 $\delta f_{\text{adiabatic}}$ 贡献的高能量粒子压强张量项 $\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$，并在图4.13中给出 $\delta W_{h,\,\text{adiabatic}}$ 的被积分项 $\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 在 $\varphi=0$ 截面的极向二维分布。

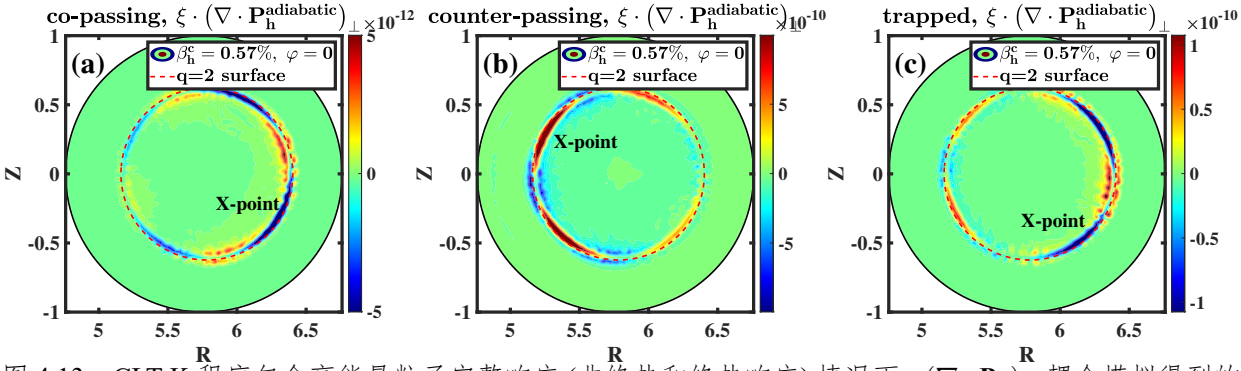

图 4.13　CLT-K 程序包含高能量粒子完整响应 (非绝热和绝热响应) 情况下，$(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟得到的高能量粒子绝热响应 $\delta W_{h,\,\text{adiabatic}}$ 的被积分项 $\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 在极向的二维分布 ($\beta_h^c=0.57\%$，$t=2991.2\tau_A$，$\varphi=0$ 截面)，分别对应：(a) 同向通行高能量粒子；(b) 反向通行高能量粒子；(c) 捕获高能量粒子。红色虚线表示 $q=2$ 有理面，‘X-point’ 标出了 $m/n=2/1$ 撕裂模的一个 X 点。

从图4.13 (a) 中可以看到，对于同向通行高能量粒子，其绝热响应贡献的 $\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 在 $m/n=2/1$ 撕裂模的两个 X 点 (左上和右下位置) 和 O 点 (左下和右上位置) 处均为负值，表明对撕裂模线性过程的演化起到去稳作用。此外，由于同向通行高能量粒子轨道主要向弱场侧偏移，因而 $\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 在弱场侧的强度明显大于强场侧。对于反向通行高能量粒子，$\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 在 X 点和 O 点处均为正值，如图4.13 (b) 所示，因此对撕裂模主要起致稳作用。而 $\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 在强场侧的幅值明显大于弱场侧，这也与反向通行高能量粒子漂移轨道径向向内偏离磁面有关。图4.13 (c) 给出了捕获高能量粒子的绝热响应贡献 $\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 的极向二维分布，其幅值在弱场侧为负值，而在强场侧为正，表明捕获高能量粒子的绝热响应对撕裂模在弱场侧对撕裂模主要起去稳作用，而在强场侧主要起致稳作用。由于捕获高能量粒子轨道相对难以到达强场侧，因此 $\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 在强场侧的幅值相对较小，从而，整体上捕获高能量粒子的绝热响应对撕裂模主要起去稳作用。由于模拟中高能量粒子的绝热响应近似等于 $-\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla f_0$，因此 $\boldsymbol{\xi}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{P}_h^{\text{adiabatic}}\right)_\perp$ 的幅值最大处均位于撕裂模的等离子体 $\boldsymbol{\xi}$ 的幅值最大处附近 (X 点和 O 点)，并呈现四极对称分布，其极值主要位于 $q=2$ 有理面内侧位置。综上，同向通行高能量粒子和捕获高能量粒

子的绝热响应主要对撕裂模起去稳作用，而反向通行高能量粒子的绝热响应对撕裂模则主要起致稳作用，该分析也与第4.3.3.1-4.3.3.3节的线性模拟结果一致。

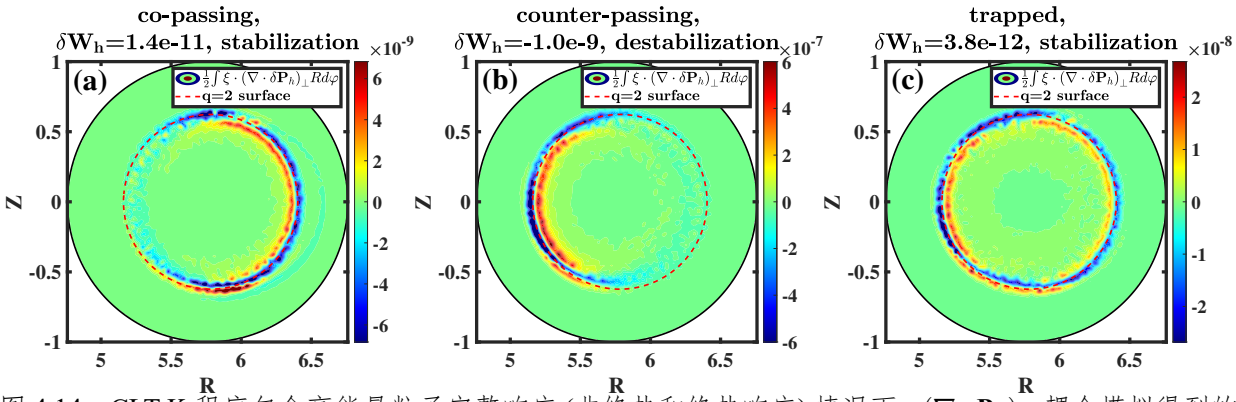

图 4.14 CLT-K 程序包含高能量粒子完整响应 (非绝热和绝热响应) 情况下，$(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟得到的高能量粒子响应 δW_h 的被积分项在环向积分后，$\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp Rd\varphi$ 在极向的二维分布 ($\beta_h^c=0.57\%$，$t=2991.2\tau_A$，$\varphi=0$ 截面)，分别对应：(a) 同向通行高能量粒子；(b) 反向通行高能量粒子；(c) 捕获高能量粒子。红色虚线表示 $q=2$ 有理面。

在此基础上，我们进一步考虑高能量粒子完整响应 δf 产生的扰动势能 δW_h。由于 δf 贡献的被积分项 $\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 存在较高的数值噪声，并且极向分布与撕裂模的 X 点和 O 点没有很明显的相关性。因此，图4.14给出了 $\beta_h^c=0.57\%$ 的撕裂模模拟中，δW_h 的被积分项在环向积分后，$\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp Rd\varphi$ 在极向的二维分布，并计算三维积分后 δW_h 的值。首先，如图4.14 (a) 所示，同向通行高能量粒子的响应在弱场侧较为明显，并在 $q=2$ 有理面内侧主要起致稳作用，而在有理面外侧存在一定的去稳作用，两者存在较强的抵消效应。对 $\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 全空间积分后发现 δW_h 大于零，表明同向通行高能量粒子对撕裂模起较弱的致稳作用。而对于反向通行高能量粒子，图4.14 (b) 显示其响应最大的位置主要在强场侧，同样的，在 $q=2$ 有理面内侧和外侧分别对撕裂模起致稳和去稳作用，但全空间积分得到 δW_h 的值为负，表明反向通行高能量粒子对撕裂模起较弱的去稳作用。对于捕获高能量粒子，如图4.14 (c) 所示，其 $\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 在极向上具有较好的对称分布，并且幅值在 $q=2$ 有理面内外两侧分别对应致稳和去稳作用，全空间积分后得到的 δW_h 则大于零，说明捕获高能量粒子对撕裂模起较弱的致稳作用。捕获高能量粒子的响应在强场侧也有较强的分布，这与捕获高能量粒子轨道主要分布在弱场侧的情况看似不太符合。但由于捕获高能量粒子在强场侧反弹点平行速度较小，且速度方向发生反转，因此有可能导致其在强场侧受到撕裂模影响的时间相对更久，从而产生较强的响应。这部分对 δW_h 的分析表明，高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模在 $q=2$ 有理面内外两侧侧分别起致稳和去稳作用，该 δW_h 的反对称分布与 $m/n=2/1$ 撕裂模奇对称的模结构特征有关。全空间积分计算得到 δW_h 后，发现同向通行、反向通行和捕获高能量粒子分别对撕裂模起较弱的致稳、去稳和致稳作用，该结果也与第4.3.3.1-4.3.3.3节的线性模拟结果一致。

4.4 高能量粒子对 $m/n = 2/1$ EPM 的共振激发

在陈伟研究员和朱霄龙博士最近的 HL-2A 托卡马克放电实验和 M3D-K 程序的模拟工作中，普遍发现了由高能量粒子共振激发的高频 $m/n = 2/1$ EPM (其论文中也称 $m/n = 2/1$ 鱼骨模)[194,205]。根据第2.1.2节公式2.7，高能量粒子与撕裂模和 EPM 等不稳定性的共振关系可以写成 $\omega - n\omega_\varphi + p\omega_\theta = 0$，$\omega_\varphi$ 和 ω_θ 分别为高能量粒子的环向和极向轨道频率，p 为整数 (只考虑整数共振)，满足 $p = l + m$，l 为高能量粒子极向运动的傅里叶分解级数。根据陈伟研究员和朱霄龙博士的模拟研究结果，在较高能量的高能量粒子参数下 ($v \gtrsim v_A$)[a]，$m/n = 2/1$ EPM 主要的共振激发机制为通行高能量粒子与 EPM 的 $p = 2$ 的共振关系，即对应 $m = 2$, $l = 0$。

在本节的 CLT-K 模拟工作中，我们在第4.3节所讨论的各向异性分布高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性稳定性的基础之上，进一步增大模拟所采用的高能量粒子比压 β_h^c，来讨论不同比压参数下，各向异性注入的高能量粒子导致由 $m/n = 2/1$ 撕裂模向 $m/n = 2/1$ EPM 等高频剪切阿尔芬波不稳定性转变的过程，并系统性分析高能量粒子与 $m/n = 2/1$ EPM 等不稳定性的共振关系。除高能量粒子比压参数外，本节模拟中高能量粒子分布函数与第4.3节一致，并均采用 $(\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp$ 形式的压强耦合方程4.10进行模拟，该结果与使用电流耦合方程4.11模拟得到的结果一致。

4.4.1 同向通行高能量粒子

对于同向通行高能量粒子，当我们将高能量粒子比压 β_h^c 提高到 1% 以上，系统动能的线性增长率由原来的下降趋势 (对应撕裂模被致稳阶段) 变为随 β_h^c 的增大而升高，如图4.15 (a) 所示。同时，图 (b) 中 $m/n = 2/1$ 模式的频率发生跳变，从原来的离子抗磁漂移频率范围增加到 $0.02 \sim 0.025\omega_A$，低于 TAE 间隙的中心频率 ($\sim 0.035\omega_A$)，且模式的频率随着高能量粒子 β_h^c 的增加缓慢下降。结合下文的模结构和频率分析，图4.15中 $\beta_h^c > 1\%$ 范围的高频模式即对应被同向通行高能量粒子共振激发的 $m/n = 2/1$ EPM。在当前模拟参数下，同向通行高能量粒子共振激发 $m/n = 2/1$ EPM 的比压 β_h^c 的阈值大约为 0.86%。由于该高频 $m/n = 2/1$ EPM 主要由同向通行高能量粒子的非绝热响应共振激发，因此图4.15中高能量粒子的绝热响应对 EPM 的频率和增长率影响十分有限。

图4.16和图4.17分别给出了不同高能量粒子 β_h^c 参数下，模拟的线性阶段 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 E_θ 的频谱径向分布和极向二维模结构分布。在图4.16 (a) 中，当高能量粒子比压较低时 ($\beta_h^c = 0.57\%$)，系统中主导的模式为接近零频的 $m/n = 2/1$ 撕裂模，对应的极向扰动电场模结构如图4.17 (a) 所示，主要局域在 $q = 2$ 有理面处，呈现典型的 $m/n = 2/1$ 撕裂模特征。而当高能量粒子比压 β_h^c 增加到 0.86% 时，系统中同时存在接近零频的 $m/n = 2/1$ 撕裂模以及 $\omega = 0.025\omega_A$ 的 $m/n = 2/1$ EPM 分量，如图4.16 (b) 所示。其中 $m/n = 2/1$

[a] 模拟采用的高能量粒子注入速度 v_0 未在其论文中给出[205]，但根据相空间的高能量粒子能量信息可以估算出 v_0 大约在 $v_A \sim 2v_A$ 范围。

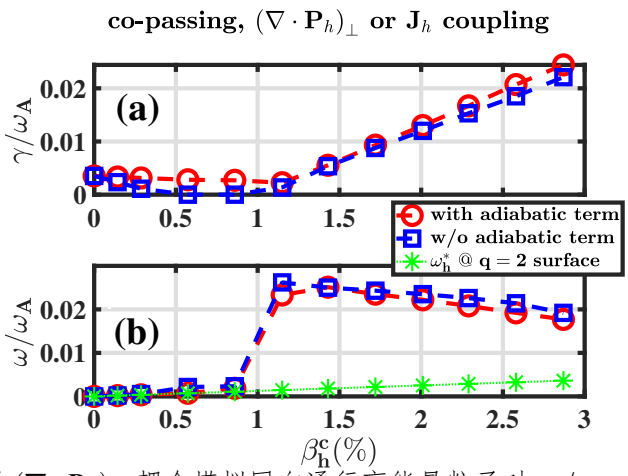

图 4.15 CLT-K 程序使用 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟同向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性性质影响以及高频 EPM 激发的模拟结果 (与 $\mathbf{J}_h$ 耦合模拟结果相同)：$m/n=2/1$ 模式的 (a) 线性增长率和 (b) 频率 (模式在离子抗磁漂移方向旋转) 与同向通行高能量粒子磁轴比压 β_h^c 的依赖关系。红色圆圈和蓝色方框分别表示包含和不包含高能量粒子绝热响应的结果，绿色星号表示 $q=2$ 有理面上高能量粒子的离子抗磁漂移频率 ω_h^*。

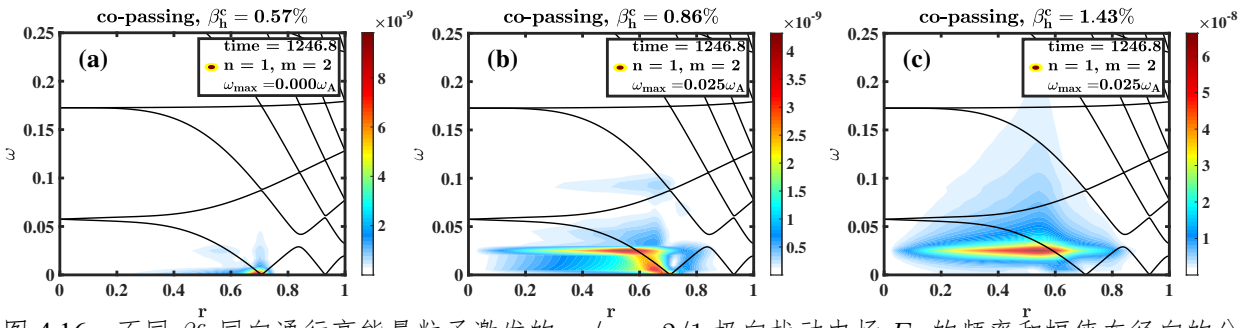

图 4.16 不同 β_h^c 同向通行高能量粒子激发的 $m/n=2/1$ 极向扰动电场 E_θ 的频率和幅值在径向的分布，黑色实线为 $n=1$ 的剪切阿尔芬波连续谱。

的 EPM 嵌入 $q=2$ 有理面内侧的 $m=2,\ n=1$ 剪切阿尔芬波连续谱，而图4.17 (b) 中模结构仍以 $m/n=2/1$ 撕裂模为主导，在 $q=2$ 有理面内侧，模结构存在一定扭曲特征。在高能量粒子的比压 β_h^c 达到 1.43% 及以上，由于 $m/n=2/1$ EPM 的线性增长率已远大于 $m/n=2/1$ 撕裂模，因此在图4.16 (c) 和图4.17 (c) 中，我们均只观察到了 $q=2$ 有理面以内的 $m/n=2/1$ EPM 分量，其频率均与连续谱相交并径向向磁轴延伸。根据图4.15 (b)，随着 β_h^c 的进一步上升，$m/n=2/1$ EPM 的频率有所下降，当 $\beta_h^c=2.01\%$ 时，$m/n=2/1$ EPM 的模式频率下降到 $0.020\omega_A$。

为了分析同向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ EPM 的共振激发机制，我们对高能量粒子的相空间扰动分布函数 δf 进行了分析。图4.18分别展示了 $m/n=2/1$ 撕裂模线性阶段、$m/n=2/1$ EPM 线性和非线性饱和阶段，$\Lambda=0.25$ 的同向通行高能量粒子的扰动分布函数 δf 在相空间 $\{\langle\psi\rangle,\varepsilon\}$ 的分布。对于较低的高能量粒子比压 ($\beta_h^c=0.29\%$)，由于系统中主导的模式为低频的 $m/n=2/1$ 撕裂模，因此我们在相空间只观察到了同向通行高

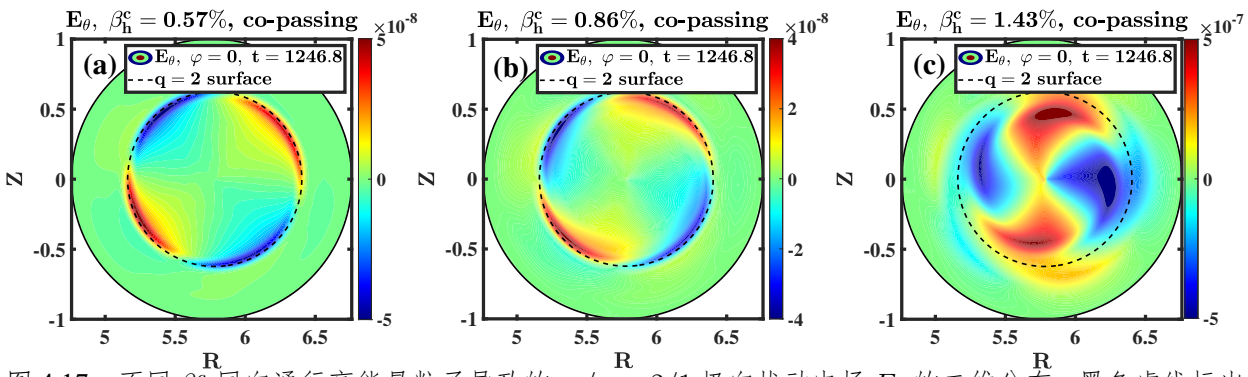

图 4.17　不同 β_h^c 同向通行高能量粒子导致的 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 E_θ 的二维分布，黑色虚线标出 $q = 2$ 有理面位置。

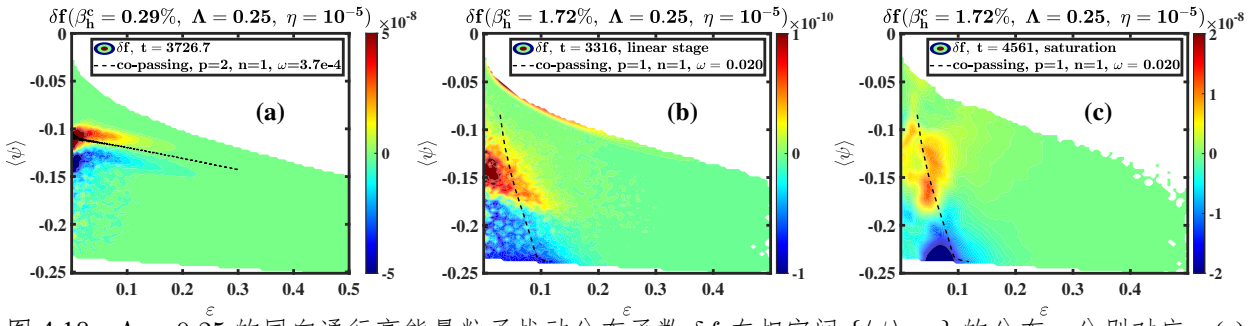

图 4.18　$\Lambda = 0.25$ 的同向通行高能量粒子扰动分布函数 δf 在相空间 $\{\langle\psi\rangle, \varepsilon\}$ 的分布，分别对应：(a) $\beta_h^c = 0.29\%$，撕裂模线性阶段；(b) $\beta_h^c = 1.72\%$，EPM 线性阶段；(c) $\beta_h^c = 1.72\%$，EPM 非线性饱和阶段。黑色虚线分别标出了高能量粒子与撕裂模和 EPM 的共振条件。

能量粒子与撕裂模之间 $p = 2,\ n = 1$ 的共振关系 (对应 $m = 2,\ l = 0$)，如图4.18 (a) 所示。该共振关系也与祝佳博士之前的模拟结果吻合[109]。对于较高的同向通行高能量粒子 ($\beta_h^c = 1.72\%$)，系统中主导的不稳定性为 $m/n = 2/1$ EPM。在 EPM 的线性阶段，我们未观察到清晰的同向通行高能量粒子与 EPM 的共振关系，但在磁轴到 $q = 2$ 有理面内侧范围内 (对应 $m/n = 2/1$ 撕裂模共振线以内，$\langle\psi\rangle < -0.17$)，存在非常明显的同向通行高能量粒子径向输运现象。对应图4.18 (b) 中，芯部 ($-0.24 \lesssim \langle\psi\rangle \lesssim -0.17$) 的高能量粒子分布函数明显下降 ($\delta f < 0$)，而 $q = 2$ 面附近 ($-0.17 \lesssim \langle\psi\rangle \lesssim -0.10$) 高能量粒子分布函数增强 ($\delta f > 0$)。$m/n = 2/1$ EPM 线性阶段未观察到清晰的共振情况，可能是由于 EPM 导致的高能量粒子径向输运远大于波和粒子共振产生的分布变化。但在 $m/n = 2/1$ EPM 的非线性饱和阶段，同向通行高能量粒子与 EPM 存在较为清晰的共振情况，共振条件满足 $p = 1,\ n = 1$ (对应 $m = 2,\ l = -1$)，该共振条件与 M3D-K 模拟中观察到的 $p = 2,\ n = 1$ 共振关系存在一定差异。这主要是由于我们模拟中采用的高能量粒子能量较低，注入速度 $v_0 \ll v_A$，因此 $p = 2,\ n = 1, \omega = 0.020\omega_A$ 的同向通行高能量粒子与 EPM 共振关系并不包含在我们模拟参数对应的相空间内。

4.4.2 反向通行高能量粒子

在反向通行高能量粒子的线性模拟中，我们同样进一步提高高能量粒子的比压 β_h^c，系统动能的线性增长率和 $q=2$ 有理面处 $m/n=2/1$ 模式的频率与 β_h^c 依赖关系如图4.19所示。与上一小节同向通行高能量粒子的情况有所不同，反向通行高能量粒子驱动下，模式增长率和频率的跳变存在更高的高能量粒子比压阈值条件。如图4.19 (a) 和 (b) 所示，当反向通行高能量粒子比压增加到 2% 之后，系统动能的线性增长率开始明显增大，并且模式的频率从较低的离子抗磁漂移频率范围跳变到 $\omega \approx 0.02\omega_A$，该频率的出现同样对应着 $m/n=2/1$ EPM 被反向通行高能量粒子共振激发。在 $m/n=2/1$ 撕裂模与 $m/n=2/1$ EPM 转变的高能量粒子比压区间内 ($2\% \lesssim \beta_h^c \lesssim 2.3\%$)，反向通行高能量粒子的绝热响应对系统动能的线性增长率和模式频率存在一定程度的影响，主要体现为对系统整体的去稳并降低 $m/n=2/1$ 模式的频率。而当比压 β_h^c 增加到 2.5% 以上，反向通行高能量粒子的绝热响应对 $m/n=2/1$ EPM 的增长率和频率产生的影响十分有限，说明反向通行高能量粒子的非绝热共振响应对 $m/n=2/1$ EPM 的激发起主导性作用。

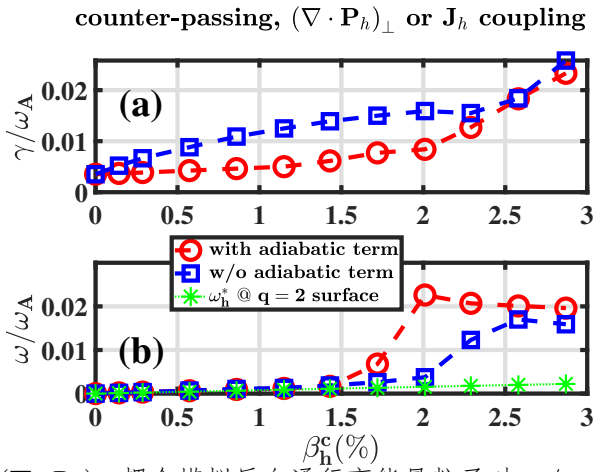

图 4.19 CLT-K 程序使用 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟反向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性性质影响以及高频 EPM 激发的模拟结果 (与 $\mathbf{J}_h$ 耦合模拟结果相同)：$m/n=2/1$ 模式的 (a) 线性增长率和 (b) 频率 (模式在离子抗磁漂移方向旋转) 与反向通行高能量粒子磁轴比压 β_h^c 的依赖关系。红色圆圈和蓝色方框分别表示包含和不包含高能量粒子绝热响应的结果，绿色星号表示 $q=2$ 有理面上高能量粒子的离子抗磁漂移频率 ω_h^*。

我们进一步分析不同 β_h^c 下模式的频率和模结构演化特征，分别如图4.20和4.21所示。当反向通行高能量粒子比压低于 0.86% 时，系统中主导的模式为低频 $m/n=2/1$ 撕裂模，其模结构与图4.17 (a) 中同向通行高能量粒子的结果比较相近，因此未在图4.20和4.21中给出。根据图4.20 (a)，我们可以看到当反向通行高能量粒子比压 β_h^c 为 1.72% 时，芯部产生一支较强的高频 $m/n=2/1$ 模式，其频率 ($\omega=0.050\omega_A$) 接近 $n=1$ 剪切阿尔芬波连续谱的 TAE 间隙频率，并与 $m/n=2/1$ 连续谱分支在小半径 0.3 左右位置相交。该高频模式的模结构如图4.21 (a) 所示，主要分布于靠近磁轴的等离子体芯部，为典型的 $m=2$ 极向分

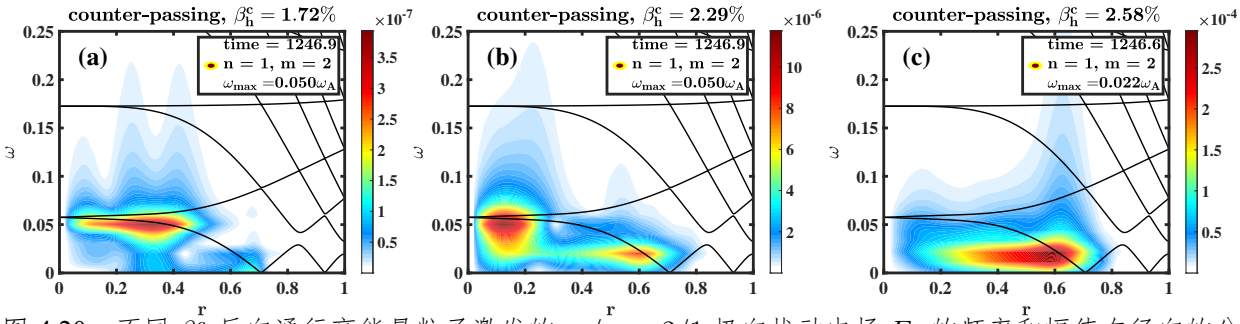

图 4.20　不同 β_h^c 反向通行高能量粒子激发的 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 E_θ 的频率和幅值在径向的分布，黑色实线为 $n = 1$ 的剪切阿尔芬波连续谱。

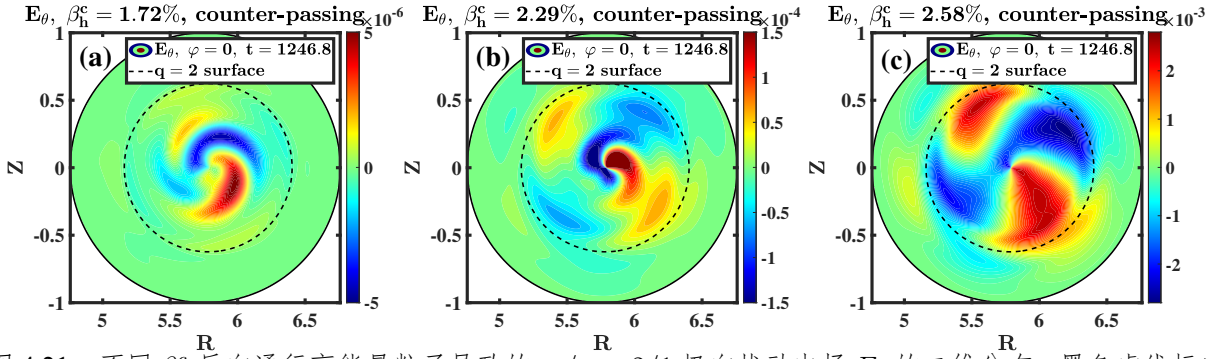

图 4.21　不同 β_h^c 反向通行高能量粒子导致的 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 E_θ 的二维分布，黑色虚线标出 $q = 2$ 有理面位置。

布，并具有较强的类气球模结构特征 (ballooning like)。为了分析该 $\omega = 0.050\omega_A$ 高频模式的性质，我们尝试使用 CLT 程序的天线模块来激发这一支不稳定性，模拟结果如图4.22所示。当天线频率接近 $0.051\omega_A$ 时，同样可以激发起频率为 $0.051\omega_A$ 的剪切阿尔芬波不稳定性，与图4.20 (a) 高能量粒子的模拟结果类似。该天线激发产生的不稳定性频率与 $m = 2$ 连续谱相交，且该频率 ($\omega_{ANT} = 0.051\omega_A$) 的天线驱动导致的剪切阿尔芬波饱和幅值最大，而随着天线频率偏离 $0.051\omega_A$，剪切阿尔芬波饱和幅值相应减小。该结果与王涛博士使用 HMGC 程序中的天线模块激发 RSAE 的模拟结果类似[70]。由于该剪切阿尔芬波不稳定性可以被天线共振激发，并且径向上主要位于靠近磁轴 $m = 2$ 连续谱的极值附近，由于安全因子在小半径 0.3 附近剪切较弱，因此连续谱具有较小的径向梯度 $\partial_r\omega_A(r)$，剪切阿尔芬波受到的连续谱阻尼较弱。根据第2.2.2.4节对不同剪切阿尔芬本征模的讨论，该模式可以确定为属于由连续谱极值导致的全域阿尔芬本征模，即 GAE[206]。通过系统性地对 β_h^c 进行参数扫描，反向通行高能量粒子共振激发该 GAE 的比压阈值条件大约为 $\beta_h^c \gtrsim 0.86\%$。随着高能量粒子比压的进一步提高，例如 $\beta_h^c = 2.29\%$ 时，图4.20 (b) 中可以同时观察到两支高频不稳定性，分别为芯部 $\omega = 0.050\omega_A$ 的 GAE 和 $q = 2$ 有理面内侧的 $\omega = 0.025\omega_A$ EPM。在更高的高能量粒子比压下，GAE 的径向模结构分布更加局域于磁轴附近，如图4.21 (b) 所示。与此同时，随着 β_h^c 的进一步升高，外侧的 $m/n = 2/1$ EPM 成为系统中主导的不稳定性，其幅值远大于低频的 $m/n = 2/1$ 撕裂模和高频的 GAE。$\beta_h^c = 2.58\%$ 情况下，反向通

行高能量粒子激发的 $m/n = 2/1$ EPM 频谱与二维模结构分别如图4.20 (c) 和图4.21 (c) 所示。相比于同向通行高能量粒子，反向通行高能量粒子对 $m/n = 2/1$ EPM 的激发需要更高的高能量粒子比压阈值，根据图4.19所给的线性模拟结果，该阈值条件大约为 $\beta_h^c = 2.0\%$。

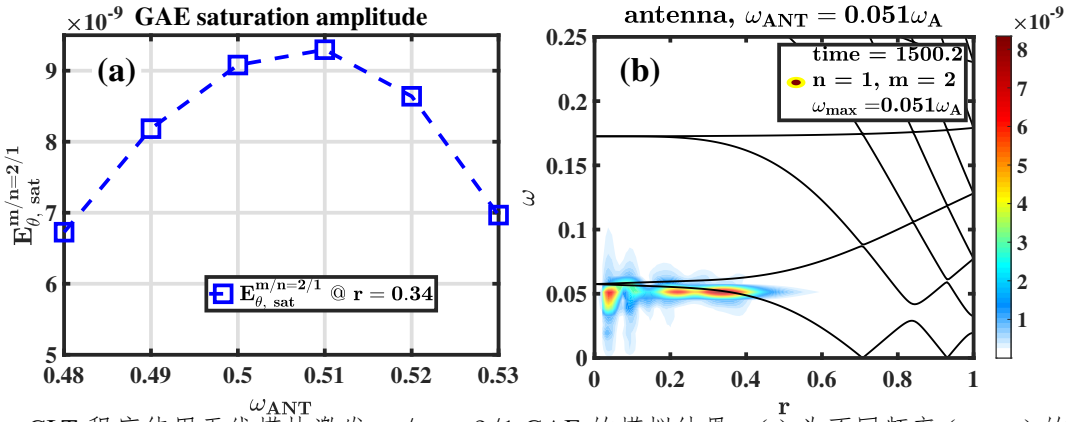

图 4.22 CLT 程序使用天线模块激发 $m/n = 2/1$ GAE 的模拟结果：(a) 为不同频率 (ω_{ANT}) 的天线驱动下，激发产生的 GAE 饱和幅值；(b) 为 $\omega_{ANT} = 0.051\omega_A$ 的天线激发产生 GAE 的 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场频谱的径向分布。

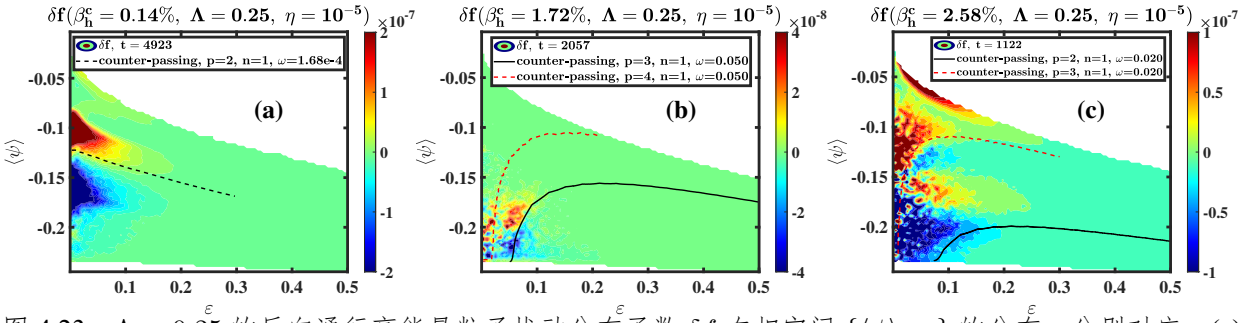

图 4.23 $\Lambda = 0.25$ 的反向通行高能量粒子扰动分布函数 δf 在相空间 $\{\langle\psi\rangle, \varepsilon\}$ 的分布，分别对应：(a) $\beta_h^c = 0.14\%$，撕裂模线性阶段；(b) $\beta_h^c = 1.72\%$，GAE 线性阶段；(c) $\beta_h^c = 2.58\%$，EPM 线性阶段。不同线型分别标出了高能量粒子与撕裂模、GAE 和 EPM 的共振条件。

为了理解反向通行高能量粒子与 $m/n = 2/1$ 撕裂模、GAE 和 EPM 的共振相互作用关系，我们在图4.23中画出 $\Lambda = 0.25$ 反向通行高能量粒子扰动分布函数在相空间的分布。首先在较低的高能量粒子比压下 ($\beta_h^c = 0.14\%$)，如图4.23 (a) 所示，反向通行高能量粒子与 $m/n = 2/1$ 撕裂模主要满足 $p = 2,\ n = 1$ 的共振关系，对应于 $m = 2,\ l = 0$。该共振关系与同向通行高能量粒子的情况基本相同，这主要是由于通行高能量粒子主要沿着磁力线运动，因此共振粒子轨道与 $m/n = 2/1$ 撕裂模模结构较为吻合。此外，相比于同向通行高能量粒子的情况，$m/n = 2/1$ 撕裂模导致反向通行高能量粒子在径向更宽的范围内存在明显的向外输运和再分布现象。图4.23 (b) 给出了反向通行高能量粒子与 $\omega = 0.050\omega_A$ 的 GAE 的共振关系。可以看到，在磁轴附近 ($\langle\psi\rangle \lesssim -0.15$)，低能段 ($E \lesssim 0.1$) 的反向通行高能量粒子与 GAE 存在较为明显的 $p = 3,\ n = 1$ 和 $p = 4,\ n = 1$ 的共振关系，分别对

应 $m=2,\ l=1$ 与 $m=2,\ l=2$，并存在较小幅度的芯部高能量粒子径向输运。由于同向通行高能量粒子的轨道整体向弱场侧偏移，而反向通行高能量粒子的轨道向强场侧偏移，因此对于前者，我们发现其平衡分布函数 f_0 在弱场侧的 GAE 幅值最强位置 ($R\approx 5.9$) 接近极大值，因此分布函数 f_0 径向梯度较小，难以对该 GAE 产生驱动，而后者平衡分布函数 f_0 明显向强场侧的偏移 (f_0 的极大值点位于磁轴内侧)，在弱场侧 GAE 幅值最强的位置 ($R\approx 5.9$)，分布函数 f_0 存在较大的径向梯度，从而有助于激发该 GAE。图4.23 (c) 则给出了 $\beta_h^c=2.58\%$ 情况下，反向通行高能量粒子与 $m/n=2/1$ EPM 的共振情况，其主要的共振条件为 $p=3,\ n=1$，对应 $m=2,\ l=1$，并且存在非常明显的从芯部到边界的高能量粒子输运和再分布现象。

4.4.3 捕获高能量粒子

在捕获高能量粒子的模拟中，同样激发产生了高频的 $m/n=2/1$ EPM。如图4.24 (a) 所示，当捕获高能量粒子的比压 β_h^c 增加到 1.72% 时，系统动能的线性增长率产生明显增加，且图4.24 (b) 中 $q=2$ 有理面 $m/n=2/1$ 不稳定性的频率从较低的离子抗磁漂移频率跳变到 $0.020\omega_A$ 左右。与通行高能量粒子情况不同，捕获高能量粒子的绝热响应对其激发产生 $m/n=2/1$ EPM 的线性增长率有较大影响，主要体现为强烈的去稳作用，但对 $m/n=2/1$ EPM 的频率影响相对较小。类似现象也出现于蔡辉山教授的模拟工作中，在其论文 [Cai and Fu 2012][193] 图 16 的模拟结果中，捕获高能量粒子的绝热响应对于高频 EPM 的激发有一定的促进作用。

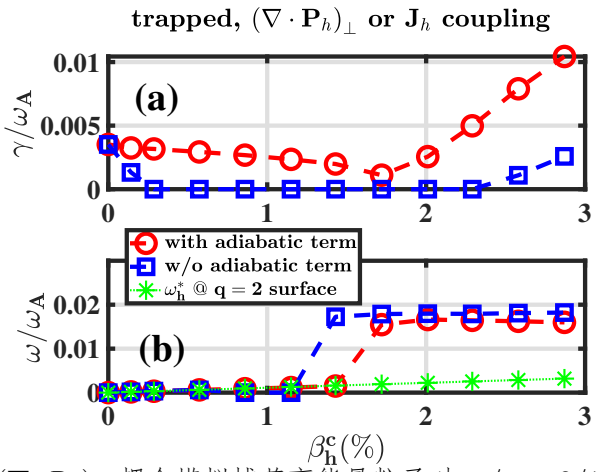

图 4.24 CLT-K 程序使用 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 耦合模拟捕获高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性性质影响以及高频 EPM 激发的模拟结果 (与 $\mathbf{J}_h$ 耦合模拟结果相同): $m/n=2/1$ 模式的 (a) 线性增长率和 (b) 频率 (模式在离子抗磁漂移方向旋转) 与反向通行高能量粒子磁轴比压 β_h^c 的依赖关系。红色圆圈和蓝色方框分别表示包含和不包含高能量粒子绝热响应的结果，绿色星号表示 $q=2$ 有理面上高能量粒子的离子抗磁漂移频率 ω_h^*。

对于较低的捕获高能量粒子比压，例如 $\beta_h^c=0.29\%$，系统中主要为低频的 $m/n=2/1$ 撕裂模，其模式频谱分布以及二维模结构分布分别如图4.25 (a) 和图4.26 (a) 所示。而捕获

高能量粒子比压较大的情况下，例如 $\beta_h^c = 2.01\%$，频率为 $0.020\omega_A$ 的 $m/n = 2/1$ EPM 成为系统主要的不稳定性，其模式频率分布以及极向二维模结构分布均与通行高能量粒子激发产生的 $m/n = 2/1$ EPM 类似，如图4.25 (b) 和图4.26 (b)。

在较低 β_h^c 参数下，捕获高能量粒子与 $m/n = 2/1$ 撕裂模的相空间共振情况如图4.27 (a) 所示。对于 $\Lambda = 1.0$ 的捕获高能量粒子，主要存在一支低能段的 $p = -1$, $n = 1$ 的共振，即对应 $m = 2$, $l = -3$，该共振导致芯部产生较强的低能段捕获高能量粒子径向输运 ($\delta f < 0$)。在等离子体边界，高能量粒子分布函数则显著上升 ($\delta f > 0$)。而 $\beta_h^c = 2.01\%$ 时，捕获高能量粒子与激发产生的 $m/n = 2/1$ EPM 存在明显的共振情况，见图4.27 (b)，最主要的一支共振条件为 $p = 0$, $n = 1$，即对应 $m = 2$, $l = -2$，表示捕获高能量粒子环向进动频率与 $m/n = 2/1$ EPM 共振。此外，还可以在图4.27 (b) 观察到较为明显的 $p = 1$, $n = 1$ 的共振关系，对应 $m = 2$, $l = -1$。

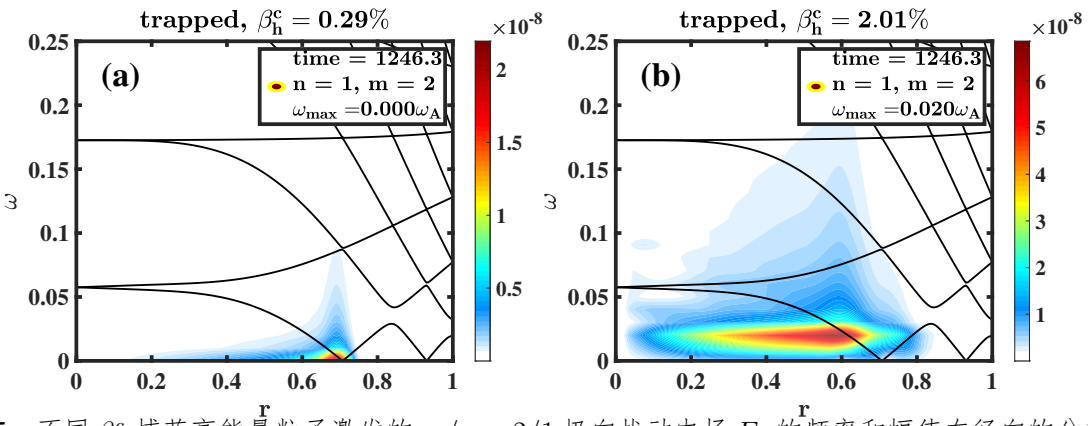

图 4.25 不同 β_h^c 捕获高能量粒子激发的 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 E_θ 的频率和幅值在径向的分布，黑色实线为 $n = 1$ 的剪切阿尔芬波连续谱。

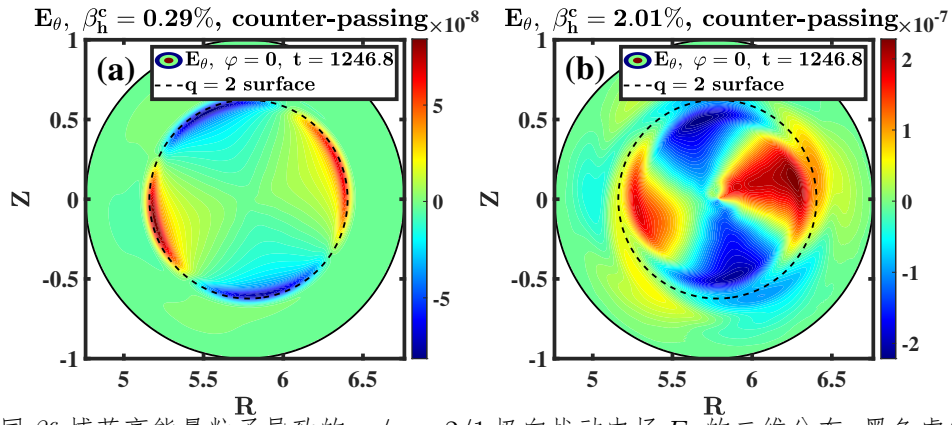

图 4.26 不同 β_h^c 捕获高能量粒子导致的 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 E_θ 的二维分布，黑色虚线标出 $q = 2$ 有理面位置。

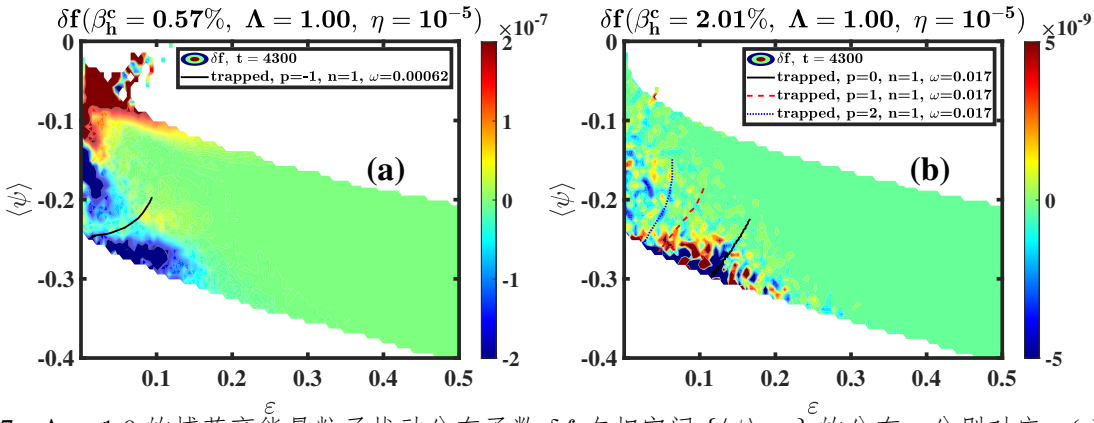

图 4.27　$\Lambda = 1.0$ 的捕获高能量粒子扰动分布函数 δf 在相空间 $\{\langle\psi\rangle, \varepsilon\}$ 的分布，分别对应：(a) $\beta_h^c = 0.57\%$，撕裂模非线性饱和阶段；(b) $\beta_h^c = 2.01\%$，EPM 线性阶段。不同线型分别标出了高能量粒子与撕裂模和 EPM 的共振条件。

4.4.4　高能量粒子参数对 EPM 线性性质的影响

这一节中，我们使用 CLT-K 程序系统性扫描高能量粒子的截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 对 $m/n = 2/1$ EPM 频率和增长率的影响。模拟均使用 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 的压强耦合形式，并保持高能量粒子速度空间和径向分布表达式不变 (保持 $v_c = 0.58v_0$)，只改变截止速度 v_0 或拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的取值 (注意，此处改变 ϱ_h 相当于改变了高能量粒子的质荷比 M_h/Z_he 或者磁场强度 B，并未改变高能量粒子的速度)，并分析 $q = 2$ 有理面处 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 E_p 的频率和扰动动能的增长率。

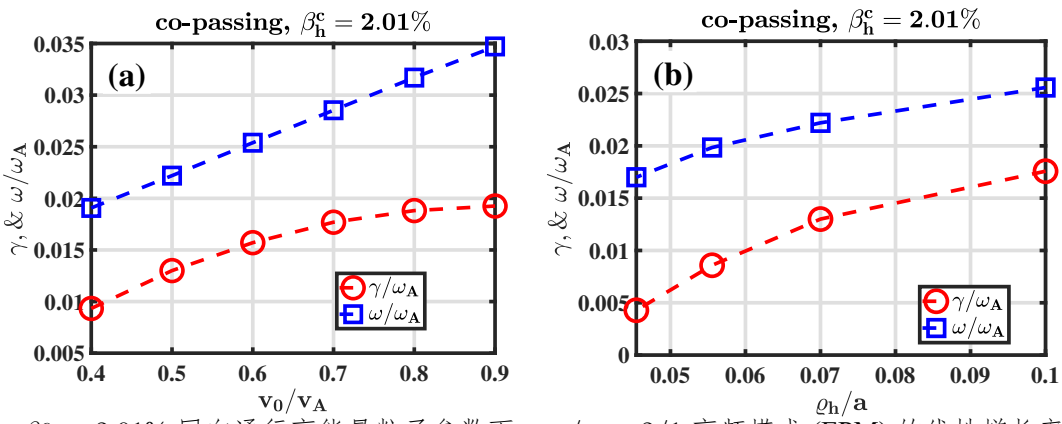

图 4.28　$\beta_h^c = 2.01\%$ 同向通行高能量粒子参数下，$m/n = 2/1$ 高频模式 (EPM) 的线性增长率和频率对 (a) 截止速度 v_0 与 (b) 高能量粒子拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的依赖关系。模拟使用 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 的压强耦合形式。

首先对于同向通行高能量粒子，CLT-K 程序模拟结果如图4.28所示。图4.28 (a) 中，$m/n = 2/1$ EPM 的频率随着 v_0 的增加从 $0.02\omega_A$ 上升到 $0.035\omega_A$，且频率与 v_0 成线性关系，表明该 EPM 的频率主要依赖于高能量粒子的特征轨道频率，该结果也与第2.2.2.5节介绍的理论和模拟结果一致[59,97]。根据图4.18的分析，对于同向通行高能量粒子激发的 $m/n = 2/1$

EPM，其频率主要取决于前者的环向渡越频率 ω_φ 和极向反弹频率 ω_θ，即 $\omega=\omega_\varphi-\omega_\theta$。与此同时，随着同向通行高能量粒子截止速度 v_0 从 $0.4v_A$ 增加到 $0.9v_A$，$m/n=2/1$ EPM 的增长率整体上呈增加趋势。此外，图4.28 (b) 中还给出了 $m/n=2/1$ EPM 频率和增长率对同向通行高能量粒子拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的依赖关系。可以看到，$m/n=2/1$ EPM 的频率和增长率与同向通行高能量粒子拉莫尔轨道半径 ϱ_h 都成正相关关系，其中，EPM 频率的增加同样与共振高能量粒子特征轨道频率的增加有关。而 $m/n=2/1$ EPM 的增长率与同向通行高能量粒子的截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 均呈正相关关系，这主要与两点因素有关：i. 随着 $m/n=2/1$ EPM 频率的升高，$m=2$ 连续谱的径向梯度 $\partial_r\omega_A(r)$ 下降，使得 EPM 受到的连续谱阻尼减弱；ii. 随着高能量粒子速度或者拉莫尔轨道半径的增加，其轨道相对磁面的偏移量增大 (轨道宽度增加)，对于同向通行高能量粒子，其轨道向弱场侧偏移，对应 EPM 幅值较强的区域，从而对 EPM 产生更强的驱动作用。对于同向通行高能量粒子，上述两个效应对 $m/n=2/1$ EPM 的激发均为促进作用。

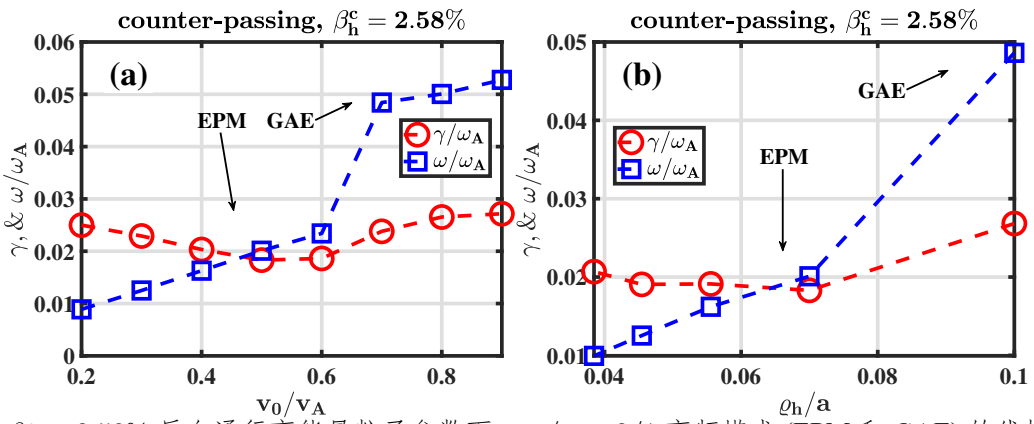

图 4.29 $\beta_h^c=2.58\%$ 反向通行高能量粒子参数下，$m/n=2/1$ 高频模式 (EPM 和 GAE) 的线性增长率和频率对 (a) 截止速度 v_0 与 (b) 高能量粒子拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的依赖关系。模拟使用 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 的压强耦合形式。

反向通行高能量粒子激发的高频不稳定性频率与增长率对高能量粒子截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的依赖关系分别如图4.29 (a) 和 (b) 所示。首先，图4.29 (a) 中，当高能量粒子的截止速度 $v_0\le 0.6v_A$ 时，系统中主导的不稳定性为频率小于 $0.03\omega_A$ 的 $m/n=2/1$ EPM，可以看到该 EPM 的频率与高能量粒子截止速度 v_0 同样成线性正相关关系。根据图4.23 (c) 的相空间分析结果，该 $m/n=2/1$ EPM 的频率主要取决于 $\omega=\omega_\varphi-3\omega_\theta$ 的共振关系。当高能量粒子截止速度 v_0 达到 $0.7v_A$ 及以上，系统中主导的模式变为 $0.05\omega_A$ 左右的芯部 GAE，GAE 的频率与 v_0 存在较弱的正相关关系，同时，由于 GAE 受到较弱的剪切阿尔芬波连续谱阻尼，扰动动能的线性增长率升高。图4.29 (b) 中，$m/n=2/1$ EPM 的频率随着反向通行高能量粒子的拉莫尔轨道半径 ϱ_h 增加而升高，当 ϱ_h 增加到 $0.1a$ 时，系统中主导的模式同样由 $m/n=2/1$ EPM 跳变为 $0.05\omega_A$ 左右的 GAE。该反向通行高能量粒子的模拟中，截止速度 v_0 或拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的增加均会导致 $m/n=2/1$ EPM 的抑制

并促进 GAE 的激发，这主要是由于反向通行高能量粒子轨道向强场侧的偏移量增加导致磁轴附近弱场侧高能量粒子分布函数径向梯度增大。而在 EPM 主导的参数区间内，相比于同向通行高能量粒子的模拟结果，$m/n = 2/1$ EPM 的增长率对反向通行高能量粒子的截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的依赖相对较弱，整体上，$m/n = 2/1$ EPM 的增长率随着 v_0 或 ϱ_h 的增加呈缓慢下降趋势。由于反向通行高能量粒子轨道向强场侧偏移增大，导致弱场侧 $r = 0.4 \sim 0.6$ 附近 $m/n = 2/1$ EPM 受到高能量粒子的驱动强度减弱，因此该效应对 $m/n = 2/1$ EPM 起致稳作用。而 $m/n = 2/1$ EPM 频率的升高则伴随着连续谱阻尼的减弱 [$\partial_r \omega_A(r)$ 减小]，该效应对 $m/n = 2/1$ EPM 则起去稳作用。上述两者的去稳和致稳贡献互相抵消，最终导致 $m/n = 2/1$ EPM 线性增长率对反向通行高能量粒子的截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的依赖关系较弱。

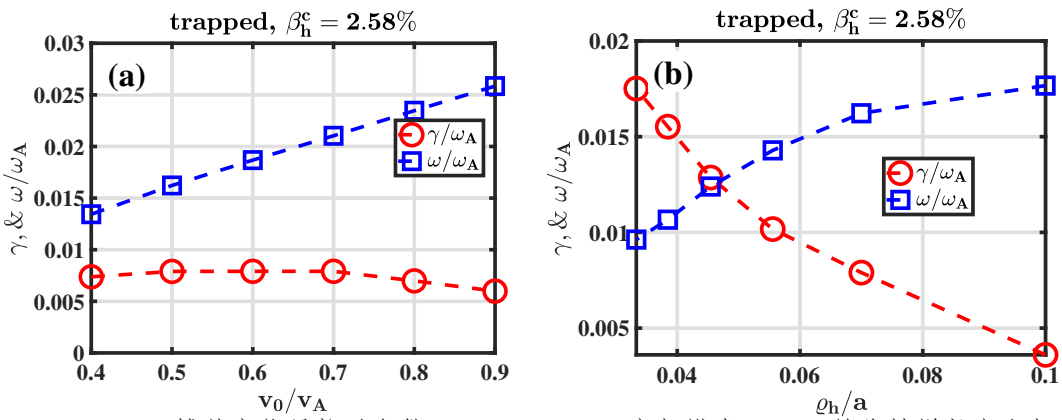

图 4.30　$\beta_h^c = 2.58\%$ 捕获高能量粒子参数下，$m/n = 2/1$ 高频模式 (EPM) 的线性增长率和频率对 (a) 截止速度 v_0 与 (b) 高能量粒子拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的依赖关系。模拟使用 $(\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp$ 的压强耦合形式。

图4.30给出捕获高能量粒子截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 对 $m/n = 2/1$ EPM 频率和线性增长率的影响。其中，$m/n = 2/1$ EPM 的频率与捕获高能量粒子的截止速度 v_0 呈线性正相关关系，如图4.30 (a) 所示。结合图4.27 (b) 的相空间共振关系，捕获高能量粒子共振激发的 $m/n = 2/1$ EPM 的频率主要取决于前者的环向进动频率，即 $\omega = \omega_\varphi$。随着 v_0 的增加，$m/n = 2/1$ EPM 的增长率先缓慢升高随后呈微弱下降趋势。图4.30 (b) 中，$m/n/ = -2/1$ EPM 的频率随着捕获高能量粒子的拉莫尔轨道半径 ϱ_h 增加而增大，但增长率则随着 ϱ_h 增加迅速减小。

4.5　小结

在本章中，我们首先通过对 $n = 1$ TAE 的非线性数值模拟严格检验了磁流体-动理学模型中，电流耦合 ($\mathbf{J}_h$) 和压强耦合 [$(\nabla \cdot \mathbf{P}_h)_\perp$] 模型在不同条件下的等价性。首先，在只考虑高能量粒子扰动分布函数 δf 对高能量粒子扰动压强 $\delta \mathbf{P}_h$ 和扰动电流 $\delta \mathbf{J}_h$ 贡献的情况下，电流耦合和压强耦合的动量方程4.10与4.11模拟得到的结果完全一致，包括 TAE 的线性增长率和非线性饱和幅值，以及边带模的非线性演化趋势等。其次，若我们同时考虑扰

动磁场与高能量粒子扰动分布函数 δf 对高能量粒子扰动压强 $\delta\left[(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp\right]$ 和扰动电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 贡献，通过使用更自洽的动量耦合方程4.2与4.5，可以同样得到完全一致的 TAE 演化的非线性模拟结果。

在只考虑高能量粒子扰动分布函数 δf 对扰动压强 $\delta\mathbf{P}_h$ 或者扰动电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 贡献的情况下，我们使用 CLT-K 程序研究了高能量粒子对 $m/n=1/1$ 内扭曲模和 $m/n=2/1$ 撕裂模等磁流体不稳定性线性稳定性的影响。在使用 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 形式的压强耦合模型时，我们观察到各向同性高能量粒子对 $m/n=1/1$ 内扭曲模的致稳作用，同时，$m/n=1/1$ 内扭曲模频率随高能量粒子比压的增大而增加，该结果与 M3D-K 的模拟结果一致[167]。与此同时，在忽略高能量粒子压强各向异性的情况下 ($P_{h\parallel}=P_{h\perp}$)，混合模拟结果退化到磁流体模拟结果，包括 $m/n=1/1$ 模结构恢复为内扭曲模特征，伴随着模式频率的消失，类似现象在 NIMROD 的模拟中也被观察到[168]。

此外，CLT-K 程序使用 M3D-K 和 NRMORD 等程序中的 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 形式压强耦合模型模拟撕裂模与高能量粒子相互作用过程得到的线性结果与文献 [Cai and Fu 2012][193] 中的结果基本一致。特别是对同向通行高能量粒子和反向通行高能量粒子，主要包括：i. 同向通行高能量粒子主要对 $m/n=2/1$ 撕裂模起较弱的致稳作用，其中，绝热响应主要起去稳作用，而非绝热相应则主要起致稳作用；ii. 反向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模起去稳作用，绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模有明显的致稳效应，而非绝热相应则起显著的去稳作用。较低比压 ($\beta_h^c\lesssim 1.0\%$) 高能量粒子的引入导致 $m/n=2/1$ 撕裂模在离子抗磁漂移方向存在有限的低频旋转，旋转频率接近于 $q=2$ 有理面处的高能量粒子压强梯度产生的离子抗磁漂移频率 ω_h^*。同时，我们使用更为自洽的 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 形式的压强耦合模型 (与电流耦合模型模拟结果完全一致)，分别计算了同向和反向通行高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响。定性上该模型得到的模拟结果与 $\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 形式压强耦合模型模拟得到的结果一致；定量上，$(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 形式的压强耦合模型计算得到的同向通行高能量粒子非绝热响应对 $m/n=2/1$ 撕裂模起更强的致稳作用。在高能量粒子比压 β_h^c 为 $0.60\%\sim 0.86\%$ 的范围内，$m/n=2/1$ 撕裂模可以被同向通行高能量粒子非绝热响应完全致稳。而该参数范围内，$\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 形式压强耦合模型模拟得到 $m/n=2/1$ 撕裂模仍有较大的线性增长率。对于反向通行的高能量粒子，$\nabla\cdot\mathbf{P}_h$ 形式与 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 形式压强耦合模拟得到的结果几乎完全一致，表明 $m/n=2/1$ 撕裂模对反向通行高能量粒子的平行惯性项影响较小。除了通行高能量粒子，我们使用 CLT-K 程序的 $(\nabla\cdot\mathbf{P}_h)_\perp$ 形式压强耦合模型模拟了捕获高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响。整体上，捕获高能量粒子对 $m/n=2/1$ 撕裂模起较弱的致稳作用，而捕获高能量粒子的绝热响应主要对 $m/n=2/1$ 撕裂模起明显的去稳作用，相对应的，其非绝热响应则对 $m/n=2/1$ 撕裂模产生强烈的致稳效应。当比压 β_h^c 达到 0.28% 及以上时，$m/n=2/1$ 撕裂模被捕获高能量粒子的非绝热响应完全致稳，同时 $m/n=2/1$ 撕裂模的离子抗磁漂移旋转现象也几乎消失。

较低比压 β_h^c 下，系统中主导的不稳定性为 $m/n=2/1$ 撕裂模，在相空间可以观察到明显的高能量粒子与撕裂模的共振现象。对于同向和反向通行高能量粒子，$p=2,\ n=1$ 均为主要的共振关系，而对于捕获高能量粒子，较为明显的共振关系为 $p=-1,\ n=1$。随着比压 β_h^c 的增加，不同分布函数的高能量粒子均可以激发出频率在 $0.02\sim0.025\omega_A$ 范围的 $m/n=2/1$ EPM。该 EPM 径向分布在 $q=2$ 有理面内侧，频率与 $m=2$ 的剪切阿尔芬波连续谱相交。对于同向通行高能量粒子，该 $m/n=2/1$ EPM 的激发阈值较低，临界高能量粒子比压大约为 $\beta_h^c=0.86\%$，该 EPM 的激发导致较强的芯部高能量粒子的径向输运。在本章模拟中得到的同向通行高能量粒子与 $m/n=2/1$ EPM 的共振关系主要为 $p=1,\ n=1$，这不同于陈伟研究员和朱霄龙博士发现的 $p=2,\ n=1$ 的共振关系[205]，这主要是由两者的高能量粒子分布函数选取存在差异造成的。对于反向通行高能量粒子，模拟中在较低的比压阈值下 ($\beta_h^c=0.86\%$) 首先激发起一支位于等离子体芯部 $\omega=0.050\omega_A$ 的 $m/n=2/1$ GAE。该 GAE 频率位于 $m=2$ 连续谱的极值附近，并可以被 CLT 程序的天线共振激发。扫描天线频率得到该 GAE 的本征频率大约为 $\omega=0.051\omega_A$，接近反向通行高能量粒子的模拟结果。此外，反向通行高能量粒子与该 $m/n=2/1$ GAE 的共振关系主要满足 $p=3,\ n=1$ 与 $p=4,\ n=1$。当反向通行高能量粒子的比压 β_h^c 增加到 2% 以上，同样可以共振激发出主导性的 $m/n=2/1$ EPM，其主要的波-粒子共振关系满足 $p=3,\ n=1$。相比于同向通行高能量粒子的模拟结果，该 $m/n=2/1$ EPM 导致反向通行高能量粒子存在更强的径向输运和再分布现象。捕获高能量粒子在比压 β_h^c 大于 1.72% 时，可以明显激发出频率接近 $0.02\omega_A$ 的 $m/n=2/1$EPM，并满足 $p=0,\ n=1$ 的共振关系，即该 EPM 主要由捕获高能量粒子的环向进动频率共振激发，此外，相空间也存在较为明显的 $p=1,\ n=1$ 次级共振关系。

在此基础上，我们系统性扫描了高能量粒子截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 对 $m/n=2/1$ EPM 线性性质的影响。该 $m/n=2/1$ EPM 的频率与同向通行、反向通行与捕获高能量粒子的截止速度 v_0 均成线性正相关关系，说明该 EPM 的频率完全由高能量粒子的特征轨道频率决定，而 $m/n=2/1$ EPM 的频率也与高能量粒子的拉莫尔轨道半径 ϱ_h 呈正相关关系。此外，$m/n=2/1$ EPM 频率的上升伴随着连续谱阻尼的减弱，而高能量粒子的截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 的变化也会显著影响高能量粒子轨道的极向偏移 (轨道宽度增加)，从而影响其对 $m/n=2/1$ EPM 的驱动强度。连续谱阻尼与高能量粒子驱动强度的变化共同导致了 $m/n=2/1$ EPM 的线性增长率对不同分布函数高能量粒子的截止速度 v_0 和拉莫尔轨道半径 ϱ_h 有完全不同的依赖关系。

5 高能量粒子与 TAE 和撕裂模的非线性相互作用

在第2.5.2节，我们简要介绍了不同实验装置中观察到的剪切阿尔芬波非线性物理现象，包括 NSTX 托卡马克中的多模 TAE 与 $n=1$ 低频种子不稳定性非线性相互作用导致的 TAE 雪崩现象[143]，以及 HL-2A 等托卡马克中普遍观察到的 TAE 等高频剪切阿尔芬波不稳定性与撕裂模等低频磁流体模式之间的非线性相互作用和耦合现象[145–148]。祝佳博士在之前的 CLT-K 程序模拟工作中[109]，深入研究了 $m/n=2/1$ 撕裂模对 $n=1$ TAE 频率非线性演化的影响，发现存在强撕裂模活动的情况下，TAE 的扫频行为相比于无撕裂模活动的情况有明显减弱。通过对高能量粒子相空间分析，发现撕裂模与通行高能量粒子的 $p=2$ 的共振影响了高能量粒子与 TAE 的非线性共振演化，从而显著影响 TAE 的非线性扫频行为。在本章的研究工作中，我们将更系统性地分析撕裂模和以 TAE 为代表的剪切阿尔芬波不稳定性的相互影响，理解不同模式的非线性演化特性，包括 TAE 和撕裂模的饱和过程、不同阶段零频带状流的产生机制、高能量粒子的再分布和撕裂模对 TAE 共振激发的影响等。

5.1 模拟参数

本章模拟工作中，我们均采用 $\{R,\varphi,Z\}$ 方向 $200\times16\times200$ 的网格，并使用 3000 万标记粒子，从而保证磁流体和 PIC 模拟的数值收敛性。高能量粒子的分布函数采用各向同性的慢化分布，即：

$$f_0 \propto \frac{1}{v^3+v_c^3}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{v_0-v}{\Delta v}\right)\right]\exp\left(-\frac{\langle\psi\rangle}{\Delta\psi}\right), \tag{5.1}$$

其中，临界速度 $v_c=0.5v_A$，截止速度 $v_0=1.2v_A$，$\Delta v=0.2v_A$，$\langle\psi\rangle$ 为沿粒子轨道平均后的极向磁通[167]，$\Delta\psi=0.37\,(\psi_{max}-\psi_{min})$。图5.1 (a) 给出了高能量粒子的径向分布函数和径向梯度，可以看到，高能量粒子分布函数径向梯度最大的地方对应于小半径 $r\approx0.43$ 的位置。垂直速度为 v_0 的高能量粒子的拉莫尔轨道半径 ϱ_h 为 $0.12a$。高能量粒子的磁轴处的比压范围为 $\beta_h^c=0.7\%\sim2.34\%$。模拟的归一化电阻率参数范围为 $\eta=10^{-7}\sim10^{-5}$，方程3.1-3.3中的耗散系数为 $D,\ \kappa\&\ \nu=3.2\times10^{-6}$。电阻率和高能量粒子比压值将在每个模拟算例中标出。

在本章的模拟中，我们忽略背景等离子体的压强 ($\beta_b=0$)，采用由 QSOLVER 平衡程序[185] 求解得到的 $R_0/a=3.2$ 的圆截面托卡马克平衡分布，其初始安全因子分布如图5.1 (b) 所示，并采用均匀的背景等离子体密度分布。通过计算，该平衡位型对应的 $m/n=2/1$

撕裂模不稳定性指数 Δ'[60] 约为 23.1，表明该系统中 $m/n=2/1$ 的电阻撕裂模是不稳定的。在本章的模拟中，我们不考虑高能量粒子对平衡的贡献，而只考虑高能量粒子扰动分布函数 δf 贡献的扰动电流 $\delta\mathbf{J}_h$ 或扰动压强 $\delta\mathbf{P}_h$ 的影响。本章内容主要考虑的是 $n=1$ 的 TAE 和 $m/n=2/1$ 撕裂模的非线性相互作用，因此，模拟中保留的 $\delta\mathbf{J}_h$ 或 $\delta\mathbf{P}_h$ 均为 $n=1$ 的分量。此外，在本章的模拟研究中，我们不区分高能量粒子扰动分布函数 δf 的绝热和非绝热贡献。本章节出现的所有频率、增长率和阻尼率均归一化到阿尔芬频率 $\omega_A=v_A/a$。

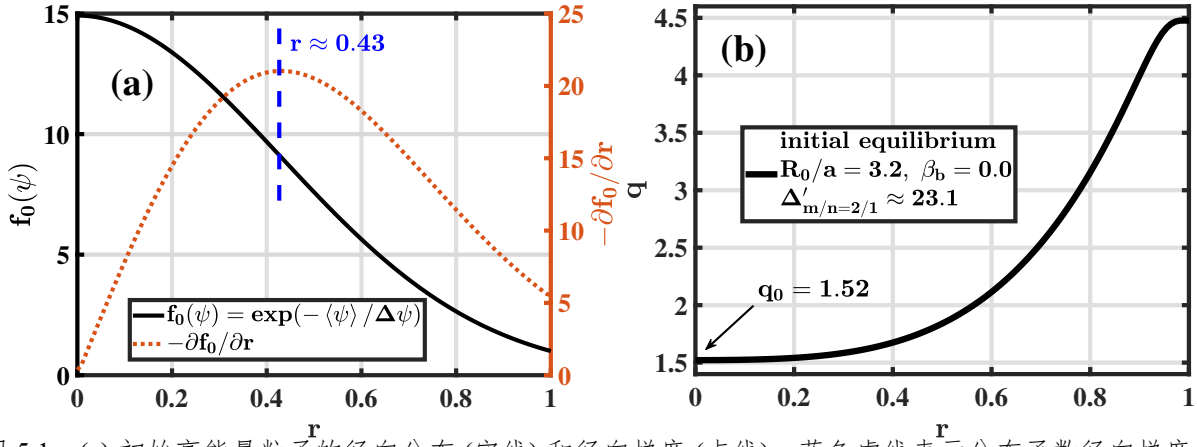

图 5.1 (a) 初始高能量粒子的径向分布 (实线) 和径向梯度 (点线)，蓝色虚线表示分布函数径向梯度最大的位置；(b) 初始平衡安全因子 q 的径向分布。

5.2 撕裂模对 TAE 非线性演化的影响

5.2.1 撕裂模模拟结果

首先，我们在不考虑高能量粒子的情况下，对 $m/n=2/1$ 撕裂模 (图表中缩写为 TM) 进行非线性模拟，为提高撕裂模的增长率，取较大电阻率，即 $\eta=10^{-5}$，并将该算例记为**撕裂模算例**。撕裂模模拟中背景等离子体不同 n 的扰动动能随时间的演化关系如图5.2所示。如图中实线所示，$n=1$ 的撕裂模分量为系统中的主导模式，在早期以 $\gamma=0.0027\omega_A$ 的增长率线性增长，并随后在 $t=8000\tau_A$ 之后达到非线性饱和。而在非线性模拟中滤掉 $n=0$ 分量之后，如图5.2黑色点线所示，撕裂模的动能一直保持线性增长，未能进入饱和阶段。这一现象说明 $n=0$ 的带状流分量对撕裂模的非线性饱和起到决定性的作用[109]，其原因主要是撕裂模非线性耦合产生的 $n=0$ 分量对于平衡的修正使得 $m/n=2/1$ 撕裂模不稳定性指数 Δ' 变小并最终达到稳定。对于撕裂模非线性耦合产生 $n=0$ 带状流分量的机制及其对撕裂模饱和的影响，将在第5.4.2节中详细讨论。尽管 $n=0$ 的分量对撕裂模的非线性饱和有着至关重要的影响，但图5.2中 $t=8000\tau_A$ 之后 $n=0$ 分量的饱和幅值相比于 $n=1$ 的主模小两个数量级以上。撕裂模非线性饱和阶段的极向扰动电场 E_θ 和 $m/n=2/1$ 磁岛对应的庞加莱截面图如图5.3所示，其模结构呈现典型的 $m/n=2/1$ 撕裂模性质，且 $m=2$ 的扰动电场和磁场主要分布在 $q=2$ 的有理面附近。

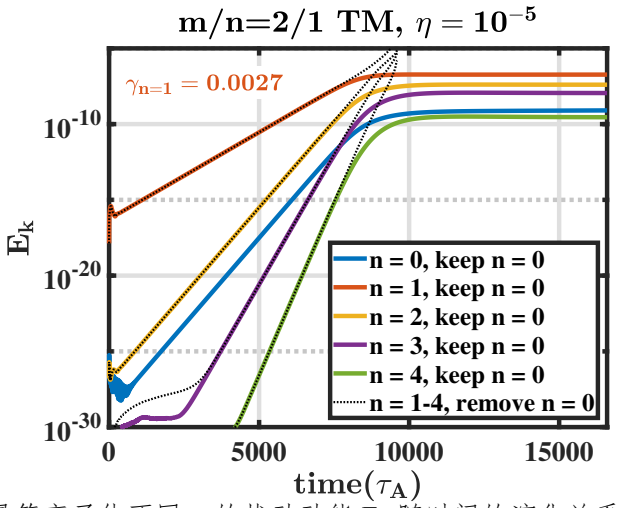

图 5.2 **撕裂模算例**中背景等离子体不同 n 的扰动动能 E_k 随时间的演化关系。彩色实线表示完全非线性的模拟结果 (保留 $n = 0$ 分量)，黑色点线表示滤掉 $n = 0$ 分量的非线性模拟结果。

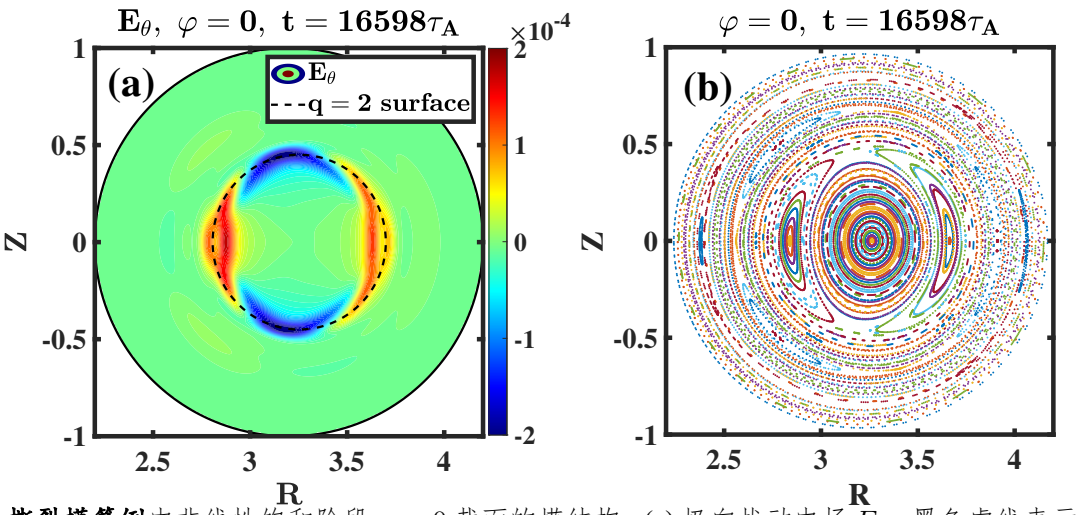

图 5.3 **撕裂模算例**中非线性饱和阶段 $\varphi = 0$ 截面的模结构：(a) 极向扰动电场 E_θ，黑色虚线表示 $q = 2$ 的有理面；(b) $m/n = 2/1$ 磁岛对应的庞加莱截面图。

5.2.2 TAE 模拟结果

其次，我们研究该平衡位型下高能量粒子激发的 $n = 1$ 的 TAE 的基本性质，采用的高能量粒子磁轴比压为 $\beta_h^c = 2.34\%$，使用方程3.23对应的压强耦合模型，并将该算例记为 **TAE 算例**。该算例中，为了排除撕裂模带来的影响，我们使用较低的电阻率参数 ($\eta = 10^{-7}$) 来降低撕裂模的增长率，使得在我们模拟的时间尺度以内 (小于 $20000\tau_A$)，撕裂模分量的幅值始终远小于 TAE，从而撕裂模对 TAE 演化的影响可以忽略不计。

图5.4 (a) 给出了 TAE 模拟中背景等离子体不同 n 的扰动动能演化，在 TAE 线性增长阶段 ($t < 3000\tau_A$)，由 TAE 非线性耦合产生的 $n = 0$ 带状流分量的增长率为 $\gamma_{n=0} = 0.229\omega_A$，约为 $n = 1$ 的 TAE 主模的两倍，$\gamma_{n=1} = 0.0115\omega_A$。该结果与第2.4.2节中介绍的 Todo 和仇志勇教授的模拟和理论结果一致[123,124,126]，第5.4.1节将对 TAE 非线性耦合产生 $n = 0$ 带

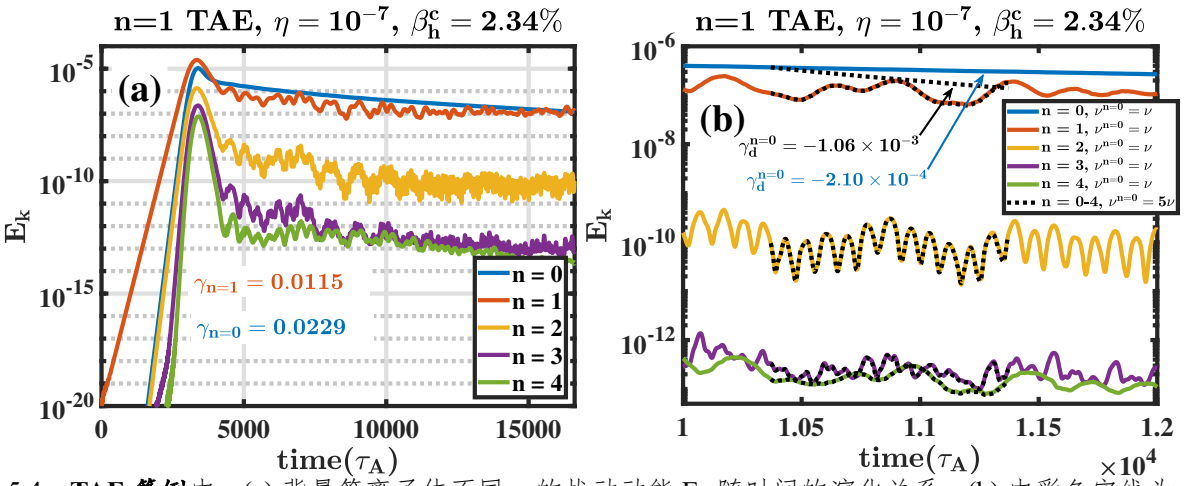

图 5.4 **TAE 算例**中：(a) 背景等离子体不同 n 的扰动动能 E_k 随时间的演化关系；(b) 中彩色实线为 (a) 图的放大，而黑色点线表示对 $n = 0$ 分量使用较高粘滞系数情况下 (即在 $t = 10370\tau_A$ 之后，将 $n = 0$ 分量的粘滞系数增大为原来的五倍，$\nu^{n=0} = 5\nu$)，背景等离子体不同 n 的扰动动能 E_k 随时间的演化关系。箭头标出了不同粘滞系数 $\nu^{n=0}$ 参数下，$n = 0$ 分量动能的衰减率 ($\gamma_d^{n=0}$)。

状流的过程展开更详细的讨论。在图5.4 (a) 中，当 TAE 由于波-粒子相空间非线性和波-波非线性 ($n = 0$ 和 $n \geq 2$ 的高-n 边带模的产生) 达到饱和之后，$n = 0$ 带状流分量和 $n = 1$ TAE 主模的幅值均呈现下降趋势。这里需要说明的是，由于 CLT-K 程序同时包含了波-粒子和波-波非线性物理，因此，此处的 TAE 非线性饱和机制较为复杂，根据以往的研究工作以及第2.4.1和2.4.2节内容的讨论，在不同的参数区间，这两种非线性饱和机制往往会各自占据主导地位。波-粒子非线性相互作用导致的 TAE 饱和主要是由于粒子被波捕获造成分布函数的平化和驱动的减弱。在该机制主导的情况下，TAE 的饱和幅度正比于其线性增长率的二次方，即 $\delta E_{sat} \propto \gamma_L^2$ [107]，如图2.11 (a) 所示，该 $\delta E_{sat} \propto \gamma_L^2$ 的依赖关系也在祝佳博士使用 CLT-K 的模拟工作中得到验证[63]。而波-波非线性相互作用对 TAE 饱和的影响主要来源于不同机制下 $n = 0$ 带状流分量的激发和高-n 边带模的产生增强了对 TAE 主模能量的耗散，从而降低 TAE 的饱和幅值，相关非线性过程也在理论和模拟上得到了广泛研究[108,123,124,126]。

在 **TAE 算例**中，非线性阶段 $n = 0$ 带状流分量和高-n 边带模的幅值较强，高能量粒子分布函数的展平导致对 $n = 1$ TAE 的驱动减弱，同时阻尼增强，使得图5.4 (a) 中非线性阶段 TAE 幅值下降到较低水平。图5.4中，$n = 0$ 带状流分量的下降主要由动量方程3.23中的粘滞项导致，该 $n = 0$ 带状流的阻尼率为 $\gamma_d^{n=0} = -2.10 \times 10^{-4}\omega_A$。为了研究 $n = 0$ 带状流分量的阻尼机制，我们在模拟中将动量方程3.23的粘滞项拆分为 $n = 0$ 和 $n \geq 1$ 两部分，即粘滞项变为 $\nabla \cdot [\nu^{n=0} \nabla (\mathbf{v}^{n=0} - \mathbf{v}_0)] + \nabla \cdot \left[\nu \nabla \left(\mathbf{v}^{n\geq 1}\right)\right]$。在 $t = 10370\tau_A$ 时刻，如图5.4 (b) 黑色点线所示，将 $n = 0$ 分量的粘滞系数增大为初始的五倍，即 $\nu^{n=0} = 5\nu$，随后，$n = 0$ 分量衰减速率明显增大，阻尼率变为大约原来五倍 ($\gamma_d^{n=0} = -1.06 \times 10^{-3}\omega_A$)。因此，在 **TAE 算例**中，粘滞项是影响 TAE 非线性饱和阶段 $n = 0$ 带状流分量衰减速率的主要因素。

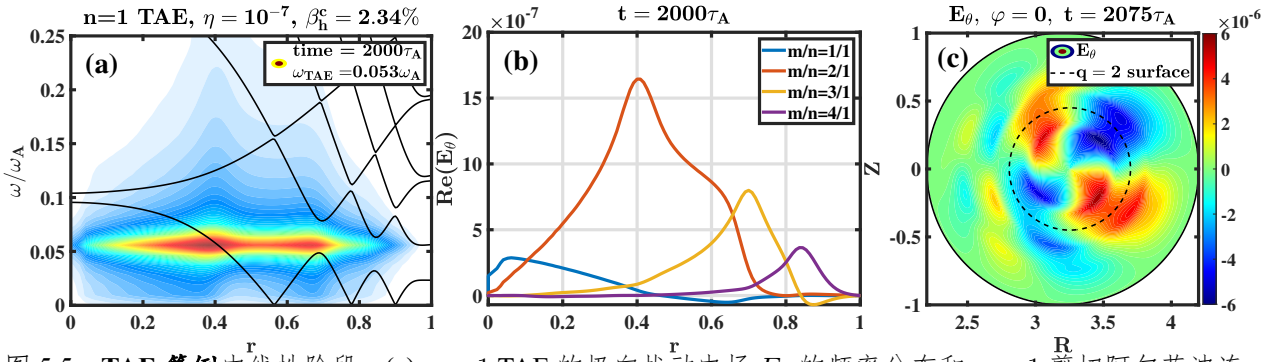

图 5.5 **TAE 算例**中线性阶段：(a) $n = 1$ TAE 的极向扰动电场 E_θ 的频率分布和 $n = 1$ 剪切阿尔芬波连续谱 (实线)；(b) $n = 1$ E_θ 不同 m 分量的径向模结构 (实部)；(c) $n = 1$ E_θ 的二维模结构分布，黑色虚线表示 $q = 2$ 的有理面。

在图5.5 (a) 中，我们给出 TAE 线性阶段 $n = 1$ 极向扰动电场 E_θ 的频率分布和 $n = 1$ 的剪切阿尔芬波连续谱，可以看到 TAE 的模式频率 ($\omega_{TAE} \approx 0.053\omega_A$) 落在 TAE 间隙频率范围内，但在小半径 0.4 的位置，其模式嵌入 $m = 2$ 连续谱内，构成了 $m = 2$ 的 EPM 分量。该模拟中，在 $m = 2$ 的连续谱附近，存在较高份额的高能量粒子以及较强的分布函数径向梯度，使得 EPM 分量可以被高能量粒子激发。并由于采用了较大拉莫尔轨道半径的高能量粒子参数 (对于垂直速度等于 v_0 的高能量粒子，$\varrho_h \approx 0.12a$)，使得 EPM 和连续谱相交处，特征空间尺度小于或可比于 ϱ_h 的不连续模结构被高能量粒子的有限轨道宽度效应展平，从而如图5.5 (b) 所示，在 $r \approx 0.4$ 的位置附近，得到较为平滑的 $m = 2$ 分量的模结构。图5.5 (b) 的模结构主要由 $m = 2$ 和 3 分量构成，且靠近磁轴 $m = 2$ 对应的 EPM 分量的幅值大于 TAE 间隙位置由 $m = 2$ 和 3 耦合而成的 TAE 分量。因此，在该模拟中得到的高频剪切阿尔芬波不稳定性由 TAE 和 EPM 分量共同构成，由于该模式的频率落在 TAE 间隙频率范围内，且其模结构主要由 $m = 2$ 和 3 两部分组成，因此为了简便起见，在本章的讨论中，我们将该剪切阿尔芬波不稳定性称为 TAE。

5.2.3 撕裂模和 TAE 的非线性相互作用模拟结果

在这一节的模拟中，我们同时考虑 $m/n = 2/1$ 的撕裂模和 $n = 1$ 的 TAE 两种不稳定性，来讨论撕裂模对 TAE 非线性演化的影响，因此模拟中采用较大的电阻率参数，即 $\eta = 10^{-5}$，并设置高能量粒子比压参数为 $\beta_h^c = 2.34\%$，η 和 β_h^c 的取值分别与第5.2.1和5.2.2节一致，将该算例记为**撕裂模 + TAE 算例**。

如图5.6所示，在较大的电阻率下，**撕裂模 + TAE 算例**中 TAE 的增长率 ($\eta = 10^{-5}$, $\gamma = 0.00875\omega_A$) 明显小于图5.4 (a) 所示的 **TAE 算例**中的增长率 ($\eta = 10^{-7}$, $\gamma = 0.0115\omega_A$)。**撕裂模 + TAE 算例**中，系统动能经历了三个阶段的饱和，分别对应：第一阶段，$t = 3300\tau_A$ 左右，波-粒子和波-波非线性效应导致的 $n = 1$ TAE 的饱和；第二阶段，由于撕裂模非线性耦合产生的 $n = 0$ 分量导致 $m/n = 2/1$ 撕裂模在 $t = 8000\tau_A$ 左右达到饱和，同时，系统的 $n = 0$ 带状流分量出现第二阶段的非线性增长，其幅值甚至超过由 $n = 1$ TAE 和

$m/n=2/1$ 撕裂模组成的 $n=1$ 分量；第三阶段，包括撕裂模、TAE 和 $n=0$ 带状流分量在内，所有模式在 $t=15000\tau_A$ 左右都达到饱和。最终，$n=0$ 带状流分量成为系统中的主导模式，其动能饱和幅值比 $n=1$ 的分量大一个量级以上。最后 $t=15000\tau_A$ 左右饱和阶段的 TAE 和撕裂模的幅值基本是可比的，其模结构的径向分布会在图5.8 (a) 中进一步讨论。此外，如图5.6彩色实线和黑色点线结果所示，由压强耦合模型和电流耦合模型计算得到的结果在线性和非线性阶段都完全一致。图5.6中 $t=8000\tau_A$ 左右第二阶段 $n=0$ 带状流分量的产生机制将在第5.3节内容中详细讨论。

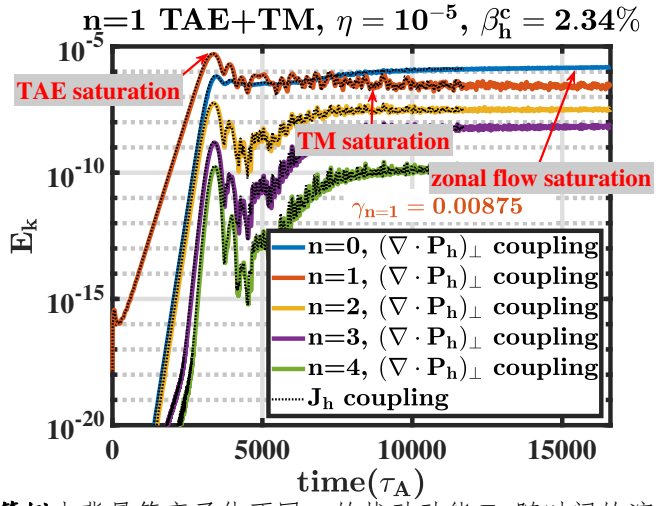

图 5.6　**撕裂模 + TAE 算例**中背景等离子体不同 n 的扰动动能 E_k 随时间的演化关系。红色箭头分别标出了 $n=1$ TAE，$m/n=2/1$ 撕裂模和 $n=0$ 带状流分量的饱和时刻。彩色实线表示压强耦合模拟得到的结果，黑色点线表示电流耦合模拟得到的结果。

图5.7给出了**撕裂模 + TAE 算例**和 **TAE 算例**中，TAE 产生的极向 $m/n=2/1$ 扰动电场的实部分量在 $q=2.49$ 磁面上随时间的演化关系，图中扰动电场分别用各自的最大振幅进行了归一化。相比于图5.7 (b) 中无撕裂模情况下的 TAE 演化趋势，图5.7 (a) 中由于撕裂模活动的存在，$n=1$ TAE 分量随时间的演化呈现出更缓慢的衰减趋势，特别是在 $t=4000\tau_A$ 之后，**撕裂模 + TAE 算例**中，TAE 的相对饱和幅值远大于同时刻 **TAE 算例**中的情况。图5.7 (a) 中由于撕裂模活动导致的 TAE 更高的饱和幅值与 $m/n=2/1$ 磁岛对高能量粒子的再分布紧密相关，撕裂模对高能量粒子的再分布过程及其影响会在第5.3和5.5节中进一步讨论。

而由于高能量粒子的存在，撕裂模会产生离子抗磁漂移方向的低频旋转，在撕裂模的线性阶段，其旋转频率大约为 $0.0009\omega_A$，而在接近撕裂模非线性饱和阶段，由于高能量粒子在 $m/n=2/1$ 磁岛附近分布函数的平化，使得 $q=2$ 有理面高能量粒子压强的径向梯度和相应的抗磁漂移频率下降，并导致撕裂模的旋转频率减小到 0。因此，在**撕裂模 + TAE 算例**，撕裂模主要贡献低频的 $m/n=2/1$ 分量，而 TAE 主要贡献高频的 $n=1$ 分量，从而我们可以通过设计高通滤波器 (high-pass filter)，将撕裂模和 TAE 共同产生的 $n=1$ 扰动

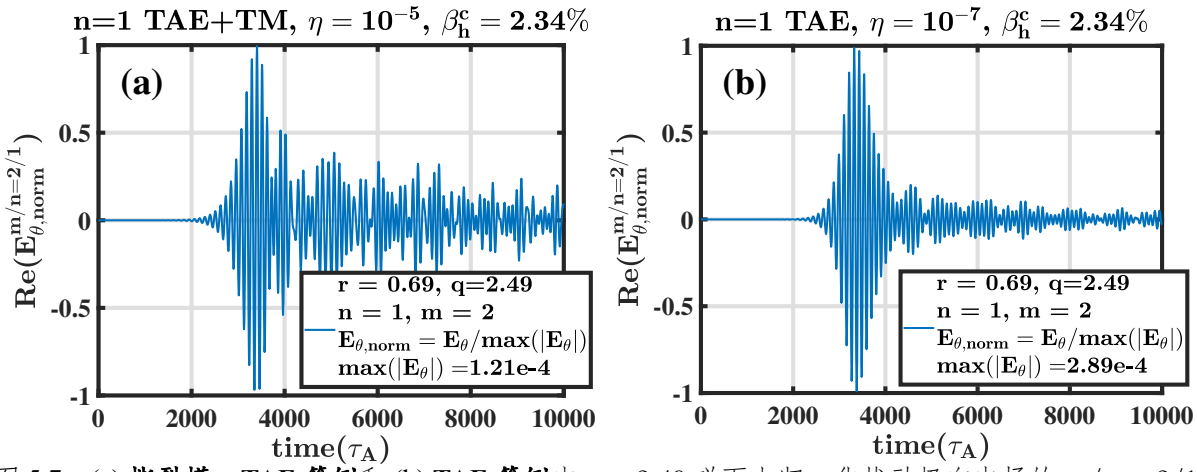

图 5.7 (a) **撕裂模 + TAE 算例**和 (b) **TAE 算例**中 $q = 2.49$ 磁面上归一化扰动极向电场的 $m/n = 2/1$ 分量 $E_{\theta,norm}^{m/n=2/1}$(实部) 随时间的演化关系，极向扰动电场用各自的最大振幅归一。

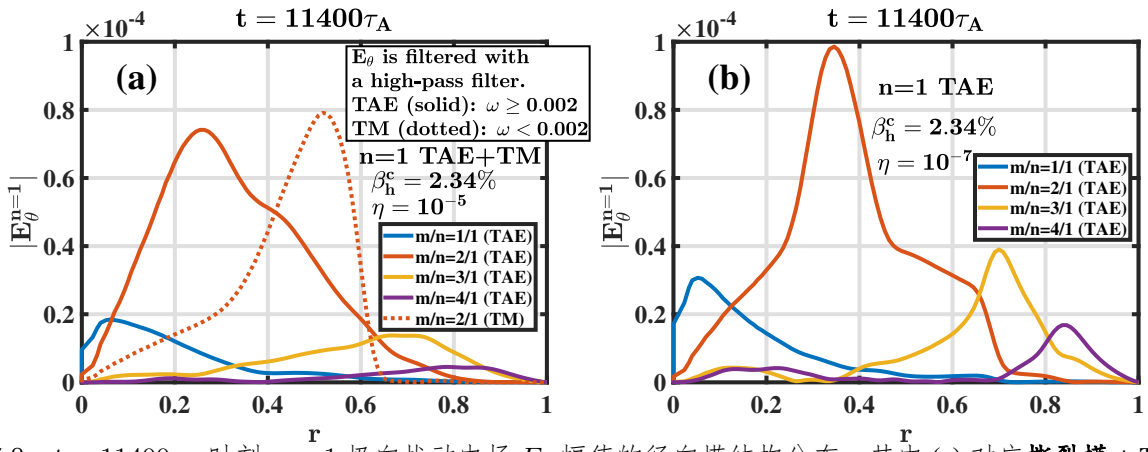

图 5.8 $t = 11400\tau_A$ 时刻 $n = 1$ 极向扰动电场 E_θ 幅值的径向模结构分布，其中 (a) 对应**撕裂模 + TAE 算例**，实线为高频分量的 TAE 模结构，点线为 $m/n = 2/1$ 低频分量的撕裂模模结构 (高频 TAE 和低频撕裂模的模结构通过高通滤波器分解，即 $\omega \geq 0.002\omega_A$ 主要对应 TAE 分量，而剩下 $\omega < 0.002\omega_A$ 的低频分量主要为撕裂模)；(b) 对应 **TAE 算例**中的 TAE 模结构。

场分解为低频撕裂模分量 ($\omega < 0.002\omega_A$) 和高频 TAE 分量 ($\omega \geq 0.002\omega_A$)。图5.8 (a) 中给出了**撕裂模 + TAE 算例**中系统非线性饱和阶段高频 $n = 1$ TAE (实线) 和低频 $m/n = 2/1$ 撕裂模 (点线) 分别产生的极向扰动电场 E_θ 模结构的径向分布。首先，我们可以看到低频的 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场呈现典型的撕裂模模结构特征，且其饱和幅值与高频 TAE 产生的 $m/n = 2/1$ 分量基本可比，意味着图5.6中系统饱和阶段，$n = 1$ 的扰动动能同时由撕裂模和 TAE 分量共同贡献。撕裂模对非线性阶段 TAE 模结构的影响主要体现在图5.8 (a) 与 (b) 的对比中，可以看到，由于撕裂模活动的存在，非线性阶段 TAE 的模结构呈现更加平坦的径向分布，特别是 $m = 3$ 和 4 分量的模结构，且在 (a) 中，$m = 2$ 的模结构分量占据绝对的主导地位，其幅值远大于其他分量。而在图5.8 (b) 的 **TAE 算例**中，不同 m 分量的幅值差异相对较小，其 $m = 3$ 和 4 分量远大于**撕裂模 + TAE 算例**的情况，径向上也呈现更加局域的尖峰分布。这里 TAE 模结构在更大的径向范围内的展宽可能与高能量粒子由

于磁岛的再分部在芯部和边界产生更强的径向梯度有关，而 $m=3$ 等 TAE 分量径向模结构的减弱和平化则可能是由于 $n=0$ 带状流分量的有限剪切对 TAE 的抑制作用。

为了进一步理解相空间高能量粒子与撕裂模和 TAE 的共振相互作用，图5.9给出了**撕裂模 + TAE 算例**中 TAE 非线性饱和阶段，不同投掷角 Λ 的高能量粒子的扰动分布函数 δf 在相空间 $\{\langle\psi\rangle, \varepsilon\}$ 的二维分布。波和高能量粒子的共振条件则根据第2.1.2节中公式2.7来确定，即 $\omega - n\omega_\varphi + p\omega_\theta = 0$，$\omega_\varphi$ 和 ω_θ 分别为高能量粒子的环向和极向轨道频率，p 为整数 (只考虑整数共振)，满足 $p = l + m$，l 为高能量粒子极向运动的傅里叶分解级数。如图5.9所示，(a) 和 (b) 中通行高能量粒子的 $p=1$ 共振 (对应 $m=2$，$l=-1$ 和 $\omega=0.053\omega_A$) 以及 (c) 中捕获高能量粒子 $p=0$ 的共振 (对应 $m=2$，$l=-2$ 和 $\omega=0.053\omega_A$) 是激发该 $n=1$ TAE 的主要机制 (TAE 在线性阶段和高能量粒子的共振情况与图5.9一致，故这里不再重复讨论)。而 $p=2$ 的通行高能量粒子和 TAE 的共振 (对应 $m=3$，$l=-1$ 和 $\omega=0.053\omega_A$) 只在较小投掷角参数 ($\Lambda=0.00$) 的高能量粒子的相空间中被观察到，如图5.9 (a) 所示。高能量粒子和 $m/n=2/1$ 撕裂模的共振则主要出现在通行粒子的相空间中，如图5.9 (a) 和 (b) 所示，其共振条件为 $p=2$ (对应 $m=2$，$l=0$ 和 $\omega=0$)[109,194,205]，而捕获粒子并未与撕裂模发生明显的共振行为。

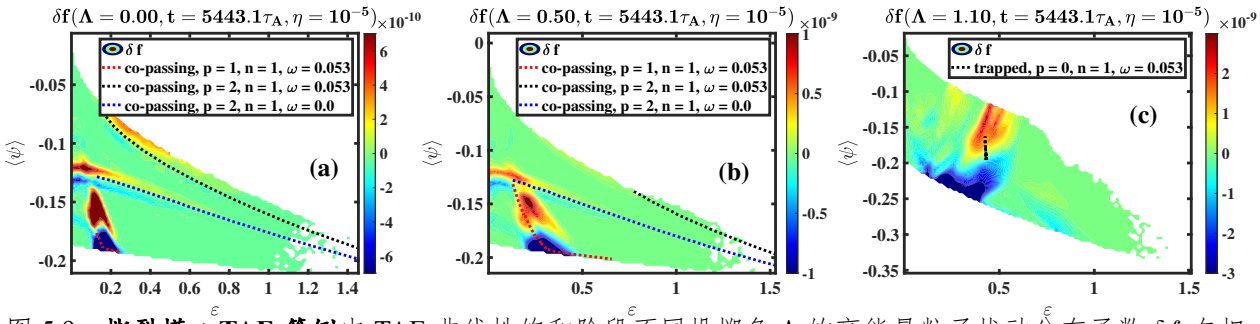

图 5.9 **撕裂模 + TAE 算例**中 TAE 非线性饱和阶段不同投掷角 Λ 的高能量粒子扰动分布函数 δf 在相空间 $\{\langle\psi\rangle, \varepsilon\}$ 的分布，分别对应 (a) $\Lambda=0.00$，(b) $\Lambda=0.50$，(c) $\Lambda=1.10$。不同颜色的点线分别标出了高能量粒子与 TAE 和撕裂模的共振条件。

5.3 主导性带状流的非线性激发

在这一节中，我们将详细讨论图5.6对应的**撕裂模 + TAE 算例**中 $t=8000\tau_A$ 左右撕裂模饱和阶段出现的 $n=0$ 带状流分量的二次激发，主要对该带状流分量的基本性质和非线性产生机制做进一步分析。

5.3.1 激发的带状流的基本性质

首先，我们通过窗口傅里叶分析和模数分解来研究**撕裂模 + TAE 算例**中 TAE、撕裂模以及带状流分量的频率演化特征。频谱分析结果如图5.10所示，其中 $t=2000\tau_A$ 之前的频谱信息由于模式的幅值太低，因此未在图中给出。该算例中，TAE 和撕裂模的频率演化如图5.10 (a) 所示，在 $t=4000\tau_A$ 之前，高频的 TAE 由于高能量粒子的驱动首先被

共振激发，并呈现较为明显的上下扫频现象。相对应的，图5.10 (b) 中，在 $t = 4000\tau_A$ 左右可以观察到第一阶段由于 TAE 激发的较强幅值 $n = 0$ 零频带状流 ($n = 0$ 带状流的模结构 $v_\theta^{n=0}$ & $v_\varphi^{n=0}$ 与 $n = 0$ 径向电场 $E_r^{n=0}$ 基本一致，因为需要满足径向的力学平衡条件，即 $E_r^{n=0} \simeq v_\theta^{n=0} B_{\varphi 0} - v_\varphi^{n=0} B_{\theta 0}$)。而在 $t = 7000\tau_A$ 之后，图5.10 (a) 中零频的撕裂模逐渐增长并趋于饱和，而 TAE 衰减到较低幅值并趋于稳定，与此同时，图5.10 (b) 中出现明显的 $n = 0$ 零频带状流的二次增长过程，该第二阶段产生的带状流幅值在 $t = 10000\tau_A$ 之后逐渐达到稳定。第二阶段带状流的产生与撕裂模的饱和过程相对应，且该带状流分量成为系统中的主导模式，其幅值远大于 $t = 4000\tau_A$ 左右由 TAE 激发的第一阶段带状流分量以及 TAE 和撕裂模的饱和水平。图5.10中的 TAE、撕裂模和带状流的频率以及强度演化结果也与图5.6中不同环向模式的动能演化趋势相一致。

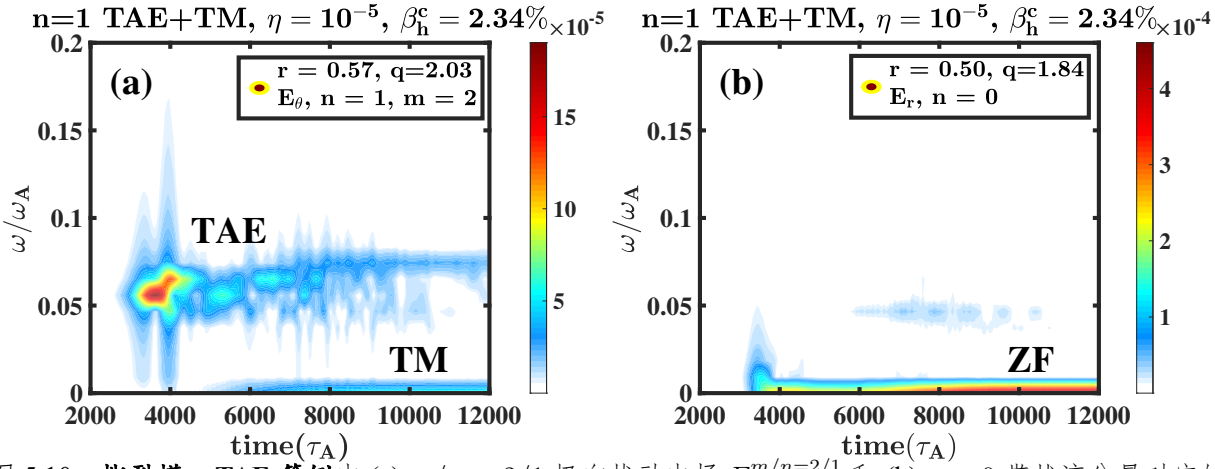

图 5.10 **撕裂模 + TAE 算例**中 (a) $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 $E_\theta^{m/n=2/1}$ 和 (b) $n = 0$ 带状流分量对应的径向扰动电场 $E_r^{n=0}$ 的频率和强度随时间的演化关系。

图5.11 (a) 和 (b) 分别给出了**撕裂模 + TAE 算例**中第二阶段主导性 $n = 0$ 带状流分量的极向和径向模结构分布。如图5.11 (b) 所示，该带状流主要由 $m = 0$ 分量占据主导，因此图5.11 (a) 中其二维模结构呈现较好的极向对称分布，且带状流在 $q = 2$ 有理面内外以相反方向流动。其中，$q = 2$ 有理面以内，带状流沿着离子抗磁漂移方向旋转 [在该平衡位型下，离子抗磁漂移 $v_{i*} = -(\nabla p_i \times \mathbf{B}/en_iB^2)$ 的方向为负，因为压强径向梯度 ∇p_i 为负，而环向磁场 B_φ 方向为正]，而在 $q = 2$ 有理面以外，带状流方向则沿着电子抗磁漂移方向 (电子抗磁漂移方向为正)。图5.11中带状流在 $q = 2$ 有理面内外的反向分布意味着 $m/n = 2/1$ 撕裂模对该带状流激发的存在重要影响。在第5.3.2节中，我们会详细讨论撕裂模对该主导性带状流的激发所起的作用，并通过非线性数值分析证明该带状流的方向主要取决于系统非线性驱动的方向。此外，图5.11 结果表明 $q = 2$ 有理面以内的带状流幅值远大于 $q = 2$ 有理面之外，靠近芯部的带状流分量占据主导地位。径向上，该带状流具有较宽的空间尺度，有一定的径向剪切，并导致带状流非线性饱和阶段 TAE 的 $m = 3$ 的模结构受到明显抑制和展平，如图5.8 (a) 所示。

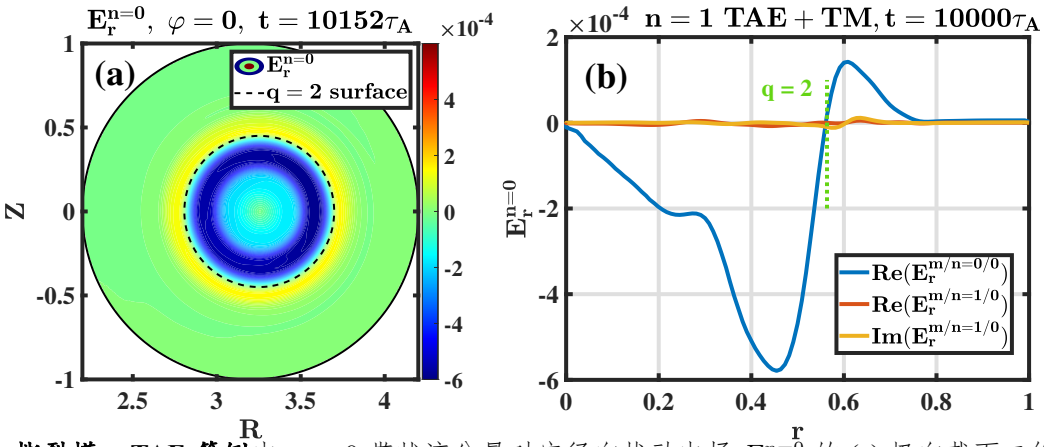

图 5.11 **撕裂模 + TAE 算例**中 $n = 0$ 带状流分量对应径向扰动电场 $E_r^{n=0}$ 的 (a) 极向截面二维模结构分布和 (b) 径向模结构分布 (分解为 $m/n = 0/0$ 和 $m/n = 1/0$ 分量)。$q = 2$ 有理面位置已在图中标出。

5.3.2 带状流的产生机制

根据上面内容的讨论，在**撕裂模 + TAE 算例**中，撕裂模非线性饱和以后，系统中同时存在三支主导性的模式，分别是：$n = 1$ 的高频 TAE 分量 ($\omega_{\text{TAE}} \approx 0.053\omega_A$)，$m/n = 2/1$ 的低频撕裂模分量 ($\omega_{\text{TM}} \approx 0$)，以及 $n = 0$ 的零频带状流分量 ($\omega_{\text{zonal flow}} = 0$)。TAE、撕裂模和带状流这三支模式互相满足模数匹配的条件，也就是 $n_{\text{TAE}} - n_{\text{TM}} = n_{\text{zonal flow}}$，但不满足三波耦合要求的频率匹配条件，即 $\omega_{\text{TAE}} - \omega_{\text{TM}} \neq \omega_{\text{zonal flow}}$。因此，该模拟中第二阶段的 $n = 0$ 带状流分量并不是由于高频 TAE 和低频撕裂模直接通过非线性三波耦合产生。

为了研究撕裂模和 TAE 相互作用过程中，带状流的非线性激发机制，我们使用 CLT 程序中的天线模块产生固定频率的振荡扰动电场来激发 TAE，从而理解 TAE 和高能量粒子在这一过程中分别起到的作用。因此该模拟算例不包含高能量粒子的贡献，而是单纯的磁流体模拟，并将概算例记为**撕裂模 + (天线) TAE 算例**。模拟中采用较大的电阻率 ($\eta = 10^{-5}$) 提高撕裂模的增长率，用来激发 TAE 的外加天线的模结构取自于 **TAE 算例**中的 TAE 线性阶段，如图5.12 (c) 所示，主要包含 $m = 2$ 和 3 的两支分量。模拟结果如图5.12 (a) 和 (b) 所示，可以看到，由天线激发的 TAE 模结构在径向更加靠外，图 (a) 对应的模结构在 $r \approx 0.4$ 的位置由于连续谱阻尼产生截断，与图5.5 (a) 所示的 **TAE 算例**情况差异较大，后者由于高能量粒子的强驱动效应在 $r \approx 0.4$ 的位置激发起较强幅值的 $m = 2$ 的 EPM 分量。在**撕裂模 + (天线) TAE 算例**中，$n = 0$ 带状流分量动能的非线性饱和幅值在整个系统达到饱和后仍远低于 $n = 1$ 的分量，如图5.12 (b) 所示。

此外，在**撕裂模 + TAE 算例**中 (TAE 由高能量粒子激发)，我们在非线性阶段 $t = 10000\tau_A$ 时刻关闭 CLT-K 程序的高能量粒子贡献，模拟结果如图5.13所示。可以看到在关闭高能量粒子驱动之后，图5.13 (a) 中 $n = 0$ 的带状流分量动能迅速以指数形式衰减到很低的幅值。与此同时，由于失去高能量粒子的驱动效应，图5.13 (b) 中 $n = 1$ TAE 产生的高频振荡也迅速消失，从而 $n = 1$ 的分量主要由 $m/n = 2/1$ 的撕裂模贡献，对应图5.13 (a) 中

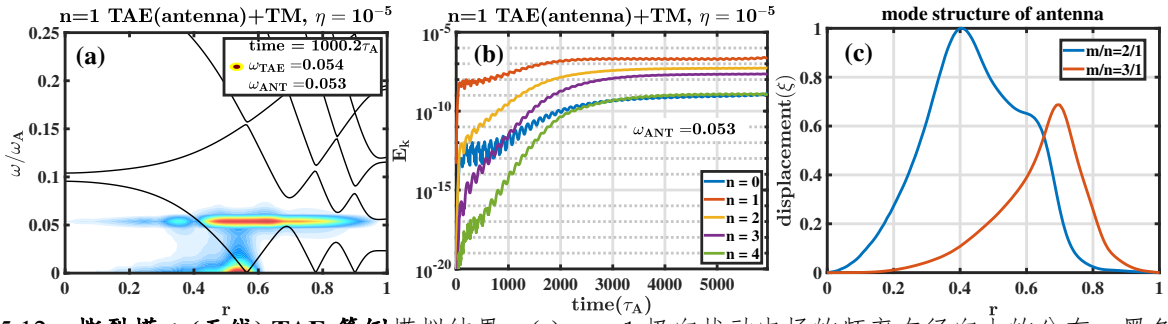

图 5.12 **撕裂模 + (天线) TAE 算例**模拟结果：(a) $n = 1$ 极向扰动电场的频率在径向上的分布，黑色实线为 $n = 1$ 剪切阿尔芬波连续谱；(b) 背景等离子体不同 n 的扰动动能 E_k 随时间的演化关系；(c) 模拟中所使用的天线模结构的径向分布，该天线模结构主要由 $m/n = 2/1$ 和 $3/1$ 分量构成，取自 **TAE 算例**中的 TAE 线性阶段模拟结果。

$n = 1$ 的动能曲线稳定在一个较低的幅值 (撕裂模的饱和幅值)。因此，根据图5.12和5.13对应的两个算例的模拟结果，我们可以得出初步结论，即**撕裂模 + TAE 算例**中第二阶段主导性的 $n = 0$ 带状流分量的激发需要撕裂模和高能量粒子同时存在并产生非线性相互作用。

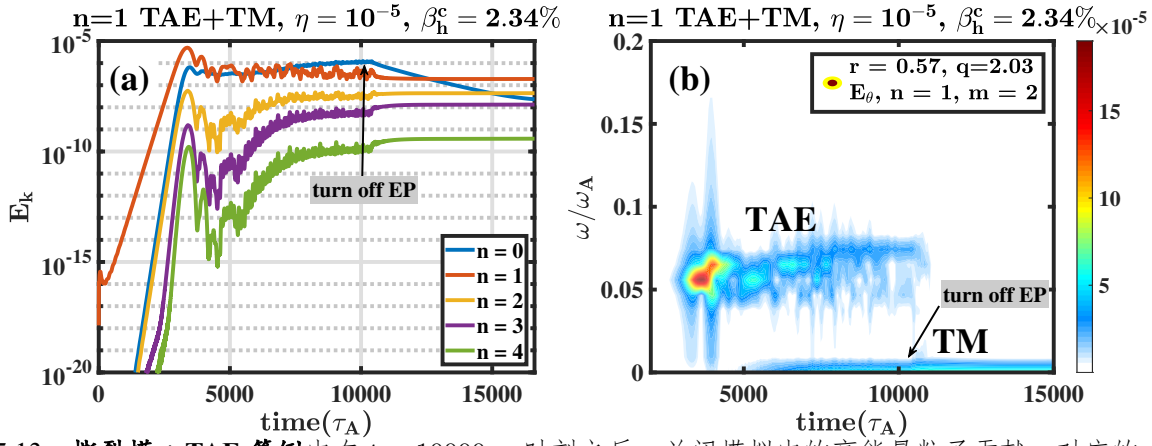

图 5.13 **撕裂模 + TAE 算例**中在 $t = 10000\tau_A$ 时刻之后，关闭模拟中的高能量粒子贡献，对应的：(a) 不同 n 的扰动动能随时间的演化关系；(b) $m/n = 2/1$ 极向扰动电场 $E_\theta^{m/n=2/1}$ 的频率和强度随时间的演化关系。箭头标出了关闭高能量粒子贡献的时刻。

为了分析高能量粒子在**撕裂模 + TAE 算例**中的集体性行为对带状流激发的影响，我们在图5.14中给出了撕裂模饱和之后，$n = 1$ 的高能量粒子扰动分布函数贡献的 $(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_\perp$ 的径向、极向和环向分量在极向的二维分布。可以看到，存在 $m/n = 2/1$ 撕裂模的情况下，高能量粒子存在显著的再分布效应。其中，径向分量的 $(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_{\perp r}$ 在 $q = 2$ 有理面内外存在很强的反剪切分布，对应于撕裂模对高能量粒子产生的径向再分布效应。而极向和环向分量的 $(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_{\perp\theta}$ 和 $(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_{\perp\varphi}$ 则呈现出清晰的 $m/n = 2/1$ 的模结构，这与撕裂模对高能量粒子在极向的再分布紧密相关。同时，我们可以看到图5.15给出的**撕裂模 + TAE 算例**中，撕裂模饱和以后高能量粒子的平行和垂直扰动压强分量 $(\delta P_{h\parallel}, \delta P_{h\perp})$ 在极向的二维分布。由于撕裂模的存在，$\delta P_{h\parallel}$ 和 $\delta P_{h\perp}$ 的模结构都存在明显的 $m/n = 2/1$ 的极向分布，特

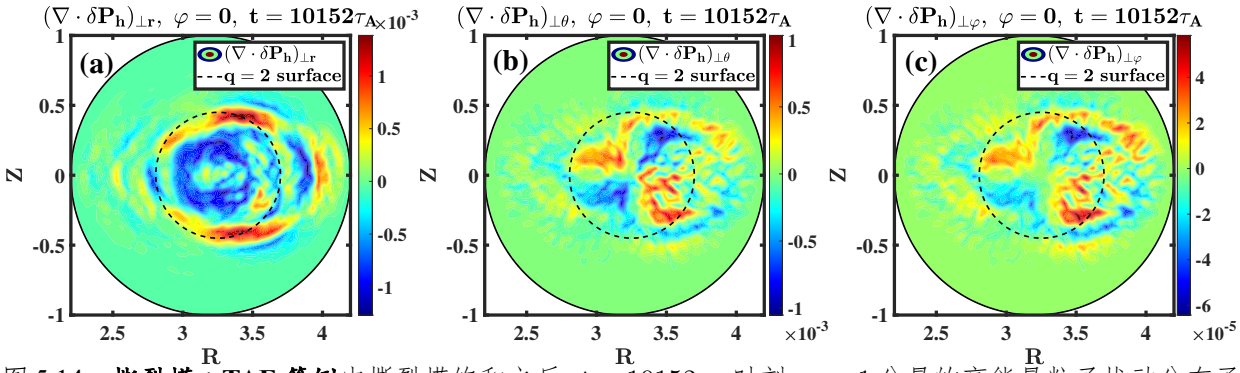

图 5.14 **撕裂模 + TAE 算例**中撕裂模饱和之后，$t=10152\tau_A$ 时刻，$n=1$ 分量的高能量粒子扰动分布函数产生的 $(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 在极向的二维分布，分别对应：(a) 径向分量 $(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_{\perp r}$，(b) 极向分量 $(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_{\perp\theta}$ 和 (c) 环向分量 $(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_{\perp\varphi}$。

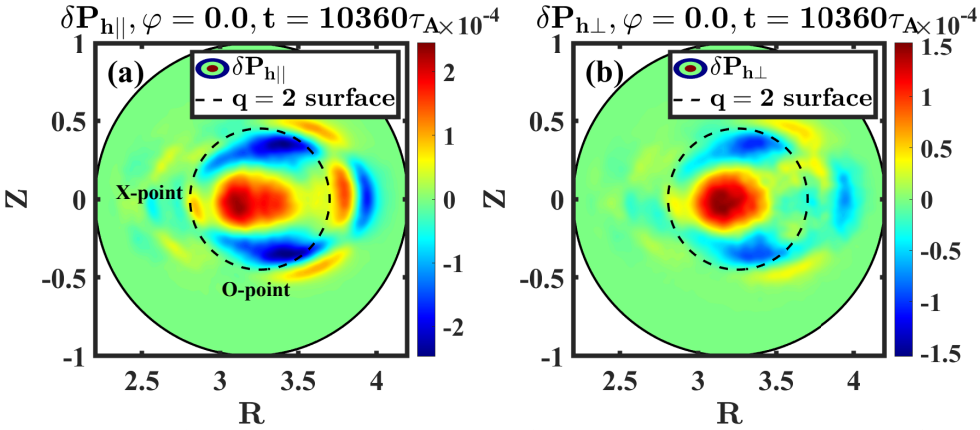

图 5.15 **撕裂模 + TAE 算例**中在 $t=10360\tau_A$ 时刻高能量粒子的 (a) 平行和 (b) 垂直扰动压强分量 $(\delta P_{h\|},\ \delta P_{h\perp})$ 在极向的二维分布，虚线表示 $q=2$ 有理面，$m/n=2/1$ 磁岛的 X 点和 O 点分别在中平面位置和竖直方向位置，如图 (a) 中所标注。

别是在磁岛上下对称的 O 点位置，高能量粒子的份额存在明显的下降，导致平行和垂直扰动高能量粒子压强都有所减小，相反，在磁岛中平面的 X 点位置，高能量粒子的份额有所上升，主要导致平行扰动压强 $\delta P_{h\|}$ 的值在 $q=2$ 有理面的 X 点增加。

图5.16则给出了 **TAE 算例**中相同阶段，只有 TAE 而不存在撕裂模情况下，高能量粒子的平行和垂直扰动压强分量在极向的分布。由于没有撕裂模，此时 $\delta P_{h\|}$ 和 $\delta P_{h\perp}$ 的模结构不再由 $m/n=2/1$ 分量主导，而主要为 $m/n=1/1$ 的结构。不同于**撕裂模 + TAE 算例**，**TAE 算例**中由于 TAE 产生的高能量粒子再分布并不能维持在一个稳定的状态，图5.16的 $\delta P_{h\|}$ 和 $\delta P_{h\perp}$ 模结构由于 TAE 的高频振荡随时间在极向和径向存在明显的变化。而**撕裂模 + TAE 算例**中，由于撕裂模非线性饱和阶段，高能量粒子分布函数在 $q=2$ 有理面展平，导致高能量粒子贡献的抗磁漂移频率下降到零。因此，$m/n=2/1$ 磁岛稳定在固定的相位，而磁岛对高能量粒子再分布产生的 $(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 以及 $\delta P_{h\|}$ 和 $\delta P_{h\perp}$ 的模结构在撕裂模饱和以后保持稳定，即从 $t\approx7000\tau_A$ 直到模拟结束 $(t\approx17000\tau_A)$，图5.14和5.15对应的模

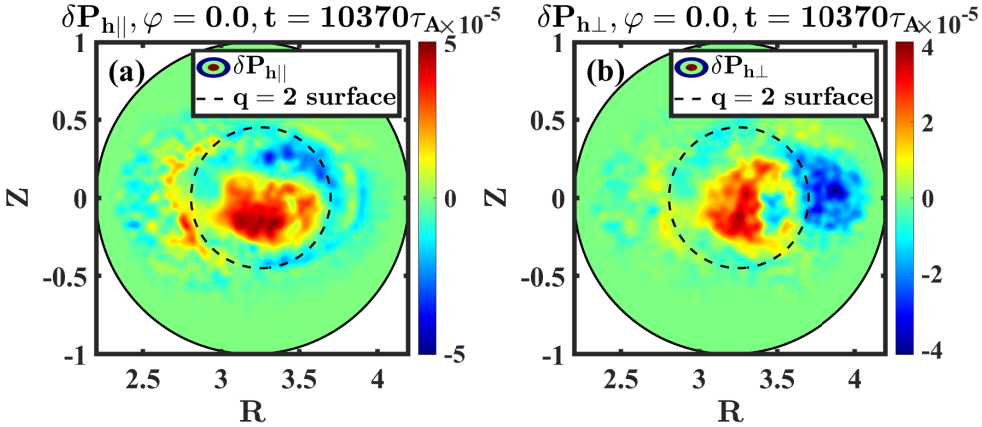

图 5.16 **TAE 算例**中在 $t = 10370\tau_A$ 时刻高能量粒子的 (a) 平行和 (b) 垂直扰动压强分量 ($\delta P_{h\|}$, $\delta P_{h\perp}$) 在极向的二维分布，虚线表示 $q = 2$ 有理面。

结构几乎保持不变。而稳定的高能量粒子扰动压强分布在动量方程3.23右端提供了一个持续的 $n = 1$ 的驱动源项。

因此，我们从**撕裂模 + TAE 算例**中提取出模拟最后时刻 ($t \approx 17000\tau_A$) 高能量粒子 $n = 1$ 的 $(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_\perp$ 分布，并将其置于磁流体动量方程3.3的右端作为一个稳定的源项，并采用较大的电阻率 ($\eta = 10^{-5}$)，来模拟同时存在该高能量粒子驱动源和撕裂模的情况下，背景等离子体不同 n 的扰动动能演化，并将该算例记为**撕裂模 +**$(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_\perp$ **算例**。该算例中，动量方程3.3变为如下形式：

$$\partial \mathbf{v}/\partial t = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \left[\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p - (\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_\perp\right]/\rho + \nabla \cdot \left[\nu \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\right]. \tag{5.2}$$

与**撕裂模 + TAE 算例**类似，在**撕裂模 +**$(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_\perp$ **算例**中，即便不存在高能量粒子，如图5.17所示, 我们可以同样观察到由于 $n = 1$ 的 $(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_\perp$ 源项驱动产生的主导性 $n = 0$ 零频带状流分量，该带状流的模结构同样由极向对称的 $m = 0$ 分量主导。

为了进一步理解**撕裂模 +**$(\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_\perp$ **算例**和**撕裂模 + TAE 算例**中 $n = 0$ 带状流的非线性产生机制，我们将动量方程5.2的右端项对 $m/n = 0/0$ 带状流分量的贡献项分解开来，主要包括如下几项：

i. 非线性对流项 (the nonlinear convective term)：$\mathcal{C} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ (也称为雷诺协强项，Reynolds stress)；

ii. 线性响应项 (the linear response term)：$\mathcal{L} = \left[\mathbf{J}_0 \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 - (\nabla \cdot \delta \mathbf{P}_h)_\perp\right]/\rho$ (此处的线性响应 $\mathcal{L}$ 不完全是线性的，因为包含一部分由密度扰动贡献的非线性效应)；

iii. 非线性磁张力项 (the nonlinear magnetic tension force term)：$\mathcal{T} = (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla)\, \delta \mathbf{B}/\rho$ (也称为麦克斯韦协强项，Maxwell stress)；

iv. 非线性磁压力项 (the nonlinear magnetic pressure force term)：$\mathcal{P} = -\nabla \left(\delta \mathbf{B}^2/2\right)/\rho$；

v. 粘滞耗散项 (the viscous diffusion term)：$\mathcal{D} = \nabla \cdot \left[\nu \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\right]$。

其中磁张力项 $\mathcal{T}$ 和磁压力项 $\mathcal{P}$ 来自于非线性洛伦兹力的贡献，即 $(\delta \mathbf{J} \times \delta \mathbf{B})/\rho$。

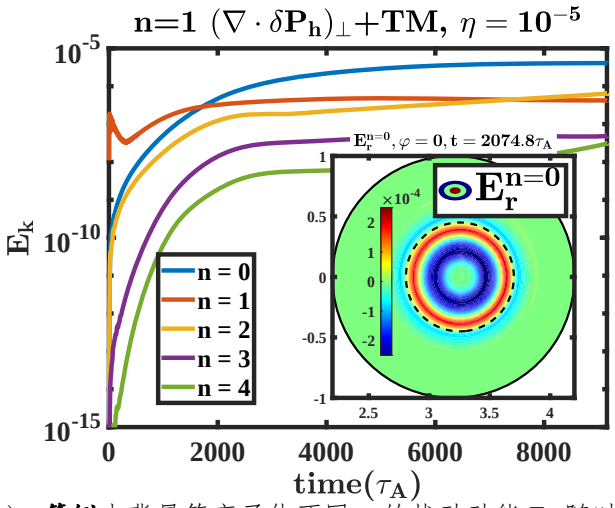

图 5.17　**撕裂模 +$(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 算例**中背景等离子体不同 n 的扰动动能 E_k 随时间的演化关系，子图中给出的是 $t=2074.8\tau_A$ 时刻 $n=0$ 带状流对应径向电场的极向二维模结构分布，虚线标出 $q=2$ 有理面的位置。

图5.18给出了**撕裂模 +$(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 算例**中 $t=2000\tau_A$ 时刻，上述不同线性和非线性项对 $m/n=0/0$ 带状流分量的驱动和阻尼的贡献。首先，如图5.18蓝色实线所示，非线性对流项 $\mathcal{C}$ 的 $m/n=0/0$ 分量主要集中在 $q=2$ 有理面附近。橙色虚线所示的线性响应项 $\mathcal{L}$ 的 $m/n=0/0$ 分量则在径向范围分布较广，但整体的幅值相对较弱。重要的是，黄色点线所示的非线性磁张力项 $\mathcal{T}$ 的 $m/n=0/0$ 分量在芯部有一个较强的幅值，且分布范围一直从芯部延展到 $q=2$ 有理面。紫色虚线所示的非线性磁压力项 $\mathcal{P}$ 对 $m/n=0/0$ 带状流分量的贡献相比于其他项可以忽略不计。此外，绿色点划线所示的粘滞阻尼项 $\mathcal{D}$ 的 $m/n=0/0$ 分量在径向也有较广的分布，并对带状流起到显著的阻尼作用。通过将方程5.2右端的所有线性和非线性项对 $m/n=0/0$ 带状流极向分量的贡献进行求和，我们可以得到撕裂模趋于饱和阶段，系统对 $m/n=0/0$ 带状流的驱动强度，如图5.18中黑色实线所示，其整体驱动强度的径向分布与带状流的模结构分布一致。带状流模结构如图中红色实线所示，该曲线表示了 $m/n=0/0$ 带状流 v_θ 分量和其在 $t=2000\tau_A$ 时刻的增长率的乘积，$m/n=0/0$ 带状流 v_θ 分量在 $r\approx0.5$ 的位置的增长率为 $\gamma=6.12\times10^{-4}\omega_A$。图5.18中黑色实线所示的对带状流的总驱动强度和红色实线所示的带状流模结构 (乘以增长率) 存在一定差异，这主要是由于 $m/n=0/0$ 带状流 v_θ 分量的增长率在径向上存在一定程度的变化。因此，动量方程5.2的非线性效应，特别是图5.15黄色点线对应的非线性磁张力项 $\mathcal{T}$ 在 $q=2$ 有理面以内区域沿着负方向 (离子抗磁漂移方向) 强烈地驱动 $m/n=0/0$ 的带状流分量，该驱动效应也与图5.11 (b) 所示的 $E_r^{n=0}$ 径向模结构一致。带状流和非线性磁张力驱动项 $\mathcal{T}$ 的方向主要由高能量粒子再分布后的扰动压强 $\delta\mathbf{P}_h$ 决定。

因此，**撕裂模 + TAE 算例**中，第二阶段主导性的带状流产生主要分为如下几个步骤：首先，$n=1$ 的扰动高能量粒子压强源项 $(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 和 $m/n=2/1$ 的撕裂模共同驱动产

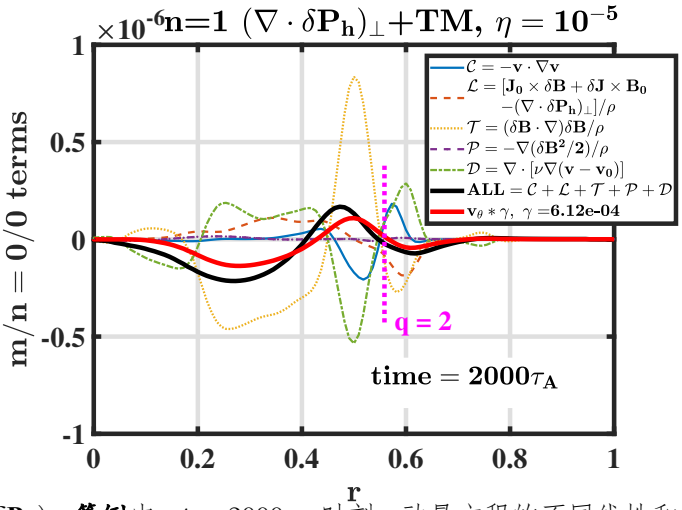

图 5.18 **撕裂模 +$(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 算例**中，$t=2000\tau_A$ 时刻，动量方程的不同线性和非线性项对 $m/n=0/0$ 带状流极向分量 v_θ 的贡献。$m/n=0/0$ 带状流极向分量 v_θ 在 $r\approx0.5$ 位置的增长率约为 6.12×10^{-4}，虚线标出 $q=2$ 有理面的位置。

生 $n=1$ 的磁场扰动 $\delta\mathbf{B}$；上述过程驱动产生的 $n=1$ 磁场扰动 $\delta\mathbf{B}$ 则通过非线性磁张力项 $\mathcal{T}=(\delta\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\delta\mathbf{B}/\rho$ 在 $q=2$ 有理面以内非线性耦合驱动出离子抗磁漂移方向的带状流分量；该驱动效应长时间稳定存在，最终，由粘滞耗散项 $\mathcal{D}$ 产生的带状流阻尼与驱动效应达到平衡，从而导致 $n=0$ 带状流达到饱和状态。尽管**撕裂模 +$(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 算例**中同样非线性产生了主导性的带状流分量，然而该带状流 (图5.18) 的径向模结构分布与**撕裂模 + TAE 算例**中的结果并不完全一致 (图5.11)，特别是在 $q=2$ 有理面附近，带状流的模结构和方向均存在一定差异。这可能是由于在**撕裂模 +$(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 算例**中，缺少高频 TAE 分量和高能量粒子响应对 $(\nabla\cdot\delta\mathbf{P}_h)_\perp$ 的调制。**撕裂模 + TAE 算例**中非线性耦合产生带状流的机制与之前研究工作报道的高能量粒子损失造成的带状流激发并不相同，后者往往需要由于磁流体或者高能量粒子不稳定性产生较大规模的全域高能量粒子损失，从而产生径向的 $n=0$ 高能量粒子损失电流 J_{hr}，并通过径向力学平衡来驱动极向的带状流分量[149,207]。例如在第2.5.2节中，我们介绍了 CHS 装置上观察到的由于 $m/n=2/1$ 鱼骨模导致高能量粒子轨道损失和带状流激发的实验现象[149]。而在我们的**撕裂模 + TAE 算例**模拟中，并没有考虑 $n=0$ 的高能量粒子扰动压强和电流的贡献，而只考虑了 $n=1$ 的分量。因此，由撕裂模和 TAE 导致的高能量粒子的损失或者再分布是通过驱动 $n=1$ 的扰动，再由 $n\neq0$ 扰动量通过非线性效应的耦合机制产生 $n=0$ 的带状流分量。

另一个需要注意的点是，图5.5 (b) 中 $m=2$ 的 EPM 分量的最大值位置与图5.11 (b) 中 $n=0$ 带状流的峰值位置一致，都位于 $r\approx0.4$ 的位置。因此，该 $m/n=2/1$ 的 EPM 分量有可能对带状流的激发以及对带状流模结构的调制起一定作用。而根据现有的模拟结果，我们可以确定的是，$m/n=2/1$ 的撕裂模对于高能量粒子的再分布以及带状流的二次激发有着决定性的作用，而 $m/n=2/1$ 的 EPM 在这一过程中有可能和 $m/n=2/1$ 的撕裂模共

同起协同作用。为了理解这一过程中 $m/n = 2/1$ 的 EPM 产生的影响，需要进行更详细的参数扫描研究，包括但不限于对高能量粒子分布函数和平衡安全因子的调整等，从而可以激发出一支较为纯粹的 TAE，排除 EPM 分量的影响，更详细的分析会在后面的研究工作中进行进一步讨论。

5.4 撕裂模和 TAE 非线性激发带状流的机制

在上一节，我们详细讨论了**撕裂模 + TAE 算例**中，由于撕裂模饱和之后对高能量粒子再分布导致第二阶段主导性带状流的非线性激发过程。这一过程产生的带状流具有较为全域的空间分布，径向剪切较弱但幅值较强，其主要机制是由于产生了较强的磁张力驱动，而粘滞等阻尼效应较弱，使得带状流可以被激发到较高的强度。除此之外，在 **TAE 算例**和**撕裂模算例**中，如图5.4和5.2所示，我们在主模 (分别对应 $n = 1$ 的 TAE 和撕裂模) 线性增长阶段，同样观察到了 $n = 0$ 的带状流分量以两倍于 $n = 1$ 主模增长率的激发过程，即 $\gamma_{n=0} = 2\gamma_{n=1}$。因此，作为和**撕裂模 + TAE 算例**的比较，在这一节中，我们将详细分析由 TAE 和撕裂模各自非线性激发 $n = 0$ 带状流分量的机制，以及激发产生的 $n = 0$ 带状流分量的特点和性质等。

5.4.1 TAE 激发带状流

首先，针对图5.4 (a) 所示的 **TAE 算例**，我们将 TAE 线性增长阶段 ($t = 2000\tau_A$) 的 $n = 0$ 带状流对应的径向电场 $E_r^{n=0}$ 模结构进行提取和极向模数分解，得到如图5.19所示的不同 m 分量的带状流径向电场径向分布。可以看到，由 TAE 驱动产生的带状流模结构在径向范围分布上更为局域，且其主导极向模式为 $m = 0$ 和 1 分量，而 $m = 2$ 分量则比 $m = 0$ 和 1 要小一个数量级。图5.19中，带状流的模结构在径向上主要存在两个峰值位置，分别在小半径 $r \approx 0.4$ 的位置 (对应 $m/n = 2/1$ 的 EPM 分量的峰值处)，以及小半径 $r \approx 0.7$ 的位置 (对应 $n = 1$ 剪切阿尔芬波连续谱中由 $m = 2$ 和 3 耦合而成的 TAE 间隙处)。对于 $r \approx 0.4$ 位置的带状流分量，其主导极向模数为 $m = 0$ 分量。这主要是由于此处高能量粒子激发产生的 EPM 分量为 $m = 2$ 的单模结构，因此其与共轭分量耦合产生的 $n = 0$ 带状流主要为 $m = 0$ 分量。而对于 $r \approx 0.7$ 的 TAE 间隙位置的带状流，其主要极向模数除了 $m = 0$ 之外，$m = 1$ 分量也存在可比的幅值，意味着该带状流激发阶段存在着 $n = 1$ TAE 的 $m = 2$ 和 3 两支分量之间的非线性耦合过程。

图5.20则给出了 TAE 产生的 $n = 0$ 带状流对应的径向电场 $E_r^{n=0}$ 的二维模结构分布。可以看到，与图5.19的结果一致，由 TAE 激发的带状流在极向上存在明显的强弱变化 (对应 $m = 1$ 的分量)，带状流幅值在弱场侧明显强于强场侧，这也与图5.5 (c) 所示的 $n = 1$ TAE 幅值在极向的强弱分布一致。TAE 产生的带状流方向主要为正方向，即电子抗磁漂移方向。需要说明的是，由于在我们的初始平衡中，忽略了背景粒子的压强贡献，因此 **TAE 算例**中模拟得到的 $n = 0$ 带状流均为零频的分量。若在初始平衡中考虑有限背景粒子压强，

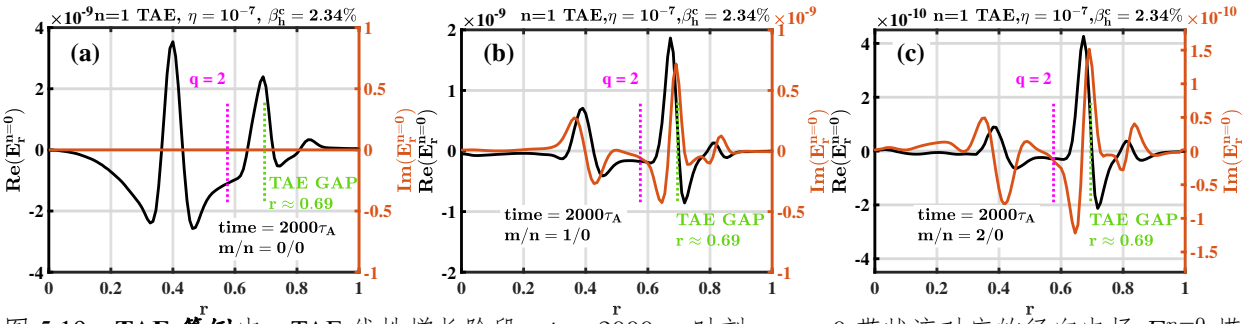

图 5.19 **TAE 算例**中，TAE 线性增长阶段，$t = 2000\tau_A$ 时刻，$n = 0$ 带状流对应的径向电场 $E_r^{n=0}$ 模结构不同 m 分量的径向分布，左右纵轴分别对应实部和虚部，其中 (a) 为 $m/n = 0/0$ 分量；(b) 为 $m/n = 1/0$ 分量；(c) 为 $m/n = 2/0$ 分量。粉色和绿色点线分别标出 $q = 2$ 有理面和 $n = 1$ 剪切阿尔芬波连续谱的 TAE 间隙的位置。

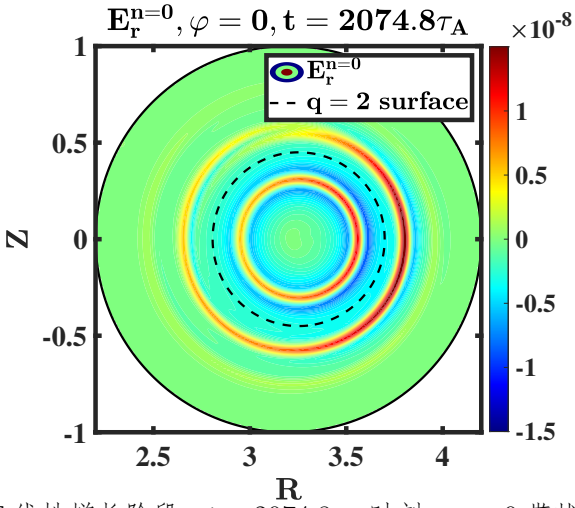

图 5.20 **TAE 算例**中，TAE 线性增长阶段，$t = 2074.8\tau_A$ 时刻，$n = 0$ 带状流对应的径向电场 $E_r^{n=0}$ 模结构的极向二维分布，虚线标出 $q = 2$ 有理面的位置。

同样可以得到和 MEGA 程序结果类似[123] 同时包含零频和接近 GAM 频率分量的 $n = 0$ 带状流分量。

为了分析 **TAE 算例**中 TAE 驱动产生图5.19和5.20所示的带状流的非线性耦合机制，我们在图5.21中同样给出 TAE 线性增长阶段，由动量方程3.23不同线性和非线性项对 $m/n = 0/0$ 带状流分量的驱动和阻尼贡献。该算例中，对 $m/n = 0/0$ 带状流产生主导性驱动作用的主要有两项，分别是图5.21中蓝色实线对应的非线性对流项 $\mathcal{C} = -\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$ 和黄色点线对应的非线性磁张力项 $\mathcal{T} = (\delta\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\delta\mathbf{B}/\rho$，即磁流体的雷诺协强和麦克斯韦协强项。与图5.19带状流的模结构相对应，图5.21中非线性对流项 $\mathcal{C}$ 和非线性磁张力项 $\mathcal{T}$ 主要分布于 $r \approx 0.4$ 的 EPM 分量极大值处和 $r \approx 0.7$ 的 $m = 2$ 和 3 的 TAE 间隙处。且这两项的径向模结构和幅值几乎完全相反，产生极强的相互抵消效应，从而只在 $r \approx 0.4$ 和 0.7 两处对 $m/n = 0/0$ 带状流分量产生较弱的沿电子抗磁漂移方向的净驱动效应。而图5.21中绿色点划线对应的粘滞耗散项对 $m/n = 0/0$ 带状流起阻尼作用，其模结构方向与带状流的净驱

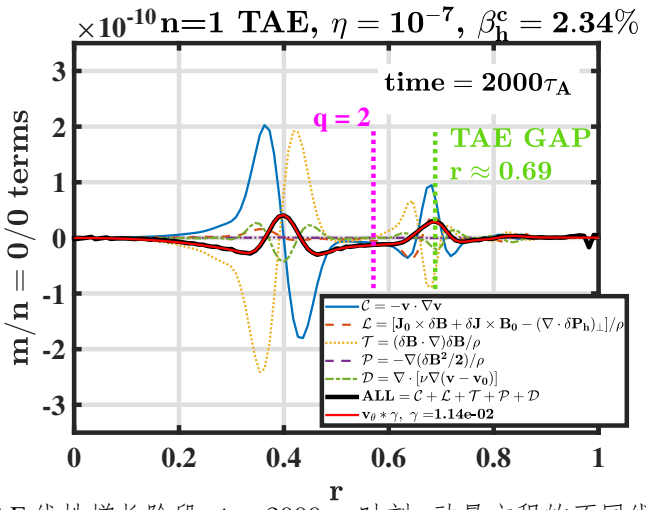

图 5.21 **TAE 算例**中，TAE 线性增长阶段，$t = 2000\tau_A$ 时刻，动量方程的不同线性和非线性项对 $m/n = 0/0$ 带状流极向分量 v_θ 的贡献。$m/n = 0/0$ 带状流极向分量 v_θ 的增长率约为 1.14×10^{-2}，粉色和绿色点线分别标出 $q = 2$ 有理面和 $n = 1$ 剪切阿尔芬波连续谱的 TAE 间隙的位置。

动增长方向相反，从而降低带状流的非线性饱和幅值。另外，该阶段 $m/n = 0/0$ 带状流极向分量 v_θ 的增长率大约为 $1.14 \times 10^{-2}\omega_A$，并将图5.21中所有驱动项和阻尼项的模结构求和，得到黑色实线对应的 $m/n = 0/0$ 带状流驱动强度的径向分布，可以看到其模结构与红色实线对应的带状流模结构 (乘以增长率) 完全一致，从而保证此处分析结果的准确性。

根据第2.4.2中介绍的 Todo 等人的模拟工作[123,124]，$n = 0$ 带状流分量对 TAE 的非线性饱和幅值会产生重要影响。如图2.15 (a) 所示，当 TAE 的幅值达到一定阈值，由于非线性耦合产生的 $n = 0$ 带状流以及高-n 边带模带来的更强的阻尼耗散效应，使得 TAE 的非线性饱和幅值可以下降到忽略磁流体非线性情况 (只考虑高能量粒子分布函数的非线性) 的一半。类似的结果在 CLT-K 程序的模拟中也被普遍观察到，由于 Todo 等人在其相关工作中已详细讨论了 $n = 0$ 带状流以及高-n 边带模对 TAE 产生的不同阻尼机制[123,124]，因此关于这部分内容，我们此处不再展开详细讨论。

5.4.2 撕裂模激发带状流

这一节我们针对图5.2所示的**撕裂模算例**，分析撕裂模线性增长阶段 ($t = 6000\tau_A$) 产生的 $n = 0$ 带状流分量的特点和物理机制。图5.22给出了 $n = 0$ 带状流对应的径向电场 $E_r^{n=0}$ 不同 m 分量的径向分布。不同于 **TAE 算例**和**撕裂模 + TAE 算例**中的情况，由撕裂模非线性耦合产生的带状流分量主要由 $m = 1$ 和部分 $m = 2$ 的虚部分量 [对应 $\sin(m\theta)$] 占据主导，而 $m = 0$ 的极向对称分量，以及 $m = 1$ 和 2 的实部分量 [对应 $\cos(m\theta)$] 则可以忽略不计，因此由撕裂模驱动的 $n = 0$ 分量在极向上并不对称。在径向分布上，撕裂模产生的 $n = 0$ 分量主要集中分布于 $q = 2$ 有理面位置，这与撕裂模的模结构位置一致。图5.23中给出了撕裂模产生的 $n = 0$ 带状流分量的径向电场 $E_r^{n=0}$ 在极向平面的分布，其模结构相对于中平面成上下对称分布，且极向流的方向在上下和 $q = 2$ 有理面内外分别成反向分

布，构成 $m=1$ 并且在径向存在较强剪切的局域分布。同样的，撕裂模非线性耦合产生的 $n=0$ 带状流分量为零频，随时间呈单调增长趋势。

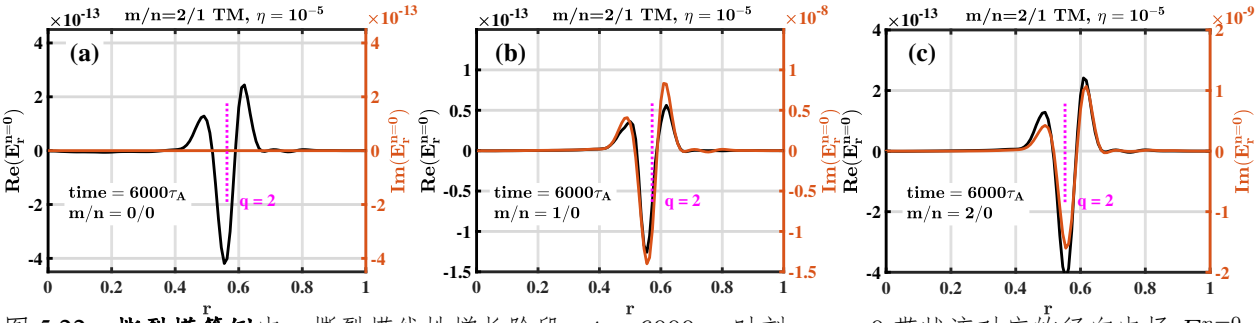

图 5.22 **撕裂模算例**中，撕裂模线性增长阶段，$t=6000\tau_A$ 时刻，$n=0$ 带状流对应的径向电场 $E_r^{n=0}$ 模结构不同 m 分量的径向分布，左右纵轴分别对应实部和虚部，其中 (a) 为 $m/n=0/0$ 分量；(b) 为 $m/n=1/0$ 分量；(c) 为 $m/n=2/0$ 分量。粉色点线标出 $q=2$ 有理面位置。

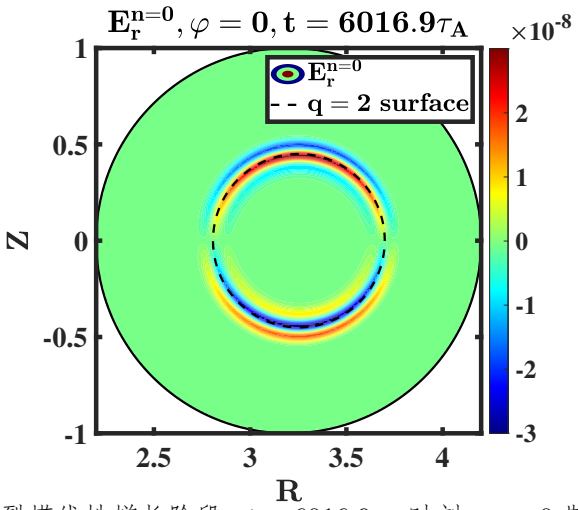

图 5.23 **撕裂模算例**中，撕裂模线性增长阶段，$t=6016.9\tau_A$ 时刻，$n=0$ 带状流对应的径向电场 $E_r^{n=0}$ 模结构的极向二维分布，虚线标出 $q=2$ 有理面的位置。

图5.24中分析了撕裂模线性增长阶段，磁流体动量方程3.3中不同线性和非线性项对极向对称的 $m/n=0/0$ 带状流 v_θ 的驱动和阻尼贡献。对于撕裂模耦合产生的 $m/n=0/0$ 带状流分量，主要存在两个主导性的驱动项，分别是图5.24中橙色虚线对应的线性响应项 $\mathcal{L}=[\mathbf{J}_0\times\delta\mathbf{B}+\delta\mathbf{J}\times\mathbf{B}_0]/\rho$ 和黄色点线对应的非线性磁张力项 $\mathcal{T}=(\delta\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\delta\mathbf{B}/\rho$。尽管在偏离 $q=2$ 有理面一定距离的地方，线性响应项 $\mathcal{L}$ 和非线性磁张力项 $\mathcal{T}$ 各自具有较大的幅值，但这两项在径向上都主要集中分布于 $q=2$ 有理面两侧，且两者的模结构和幅值几乎成对称反向分布。因此，这两项对 $m/n=0/0$ 带状流分量的贡献在远离 $q=2$ 有理面的位置几乎完全抵消，只在 $q=2$ 有理面附近非常局域的位置存在较弱的净驱动效应。其中，前者线性响应项 $\mathcal{L}$ 的贡献主要来自于 $m/n=0/0$ 分量的带状电流 $\delta\mathbf{J}^{n=0}$ 和带状磁场 $\delta\mathbf{B}^{n=0}$，对应平衡磁场位型的变化，而后者非线性磁张力项 $\mathcal{T}$ 的贡献则主要来自于 $m/n=2/1$ 撕

裂模扰动磁场的非线性耦合。图5.24中，非线性对流项 $\mathcal{C}$ 等其他非线性效应和粘滞耗散项 $\mathcal{D}$ 等对 $m/n=0/0$ 带状流分量的驱动和阻尼效应可以忽略不计。并将动量方程3.3中所有效应求和得到总的 $m/n=0/0$ 带状流非线性驱动强度，如图5.24中黑色实线所示，可以看到其模结构与 $m/n=0/0$ 带状流模结构 (乘以增长率) 完全一致。

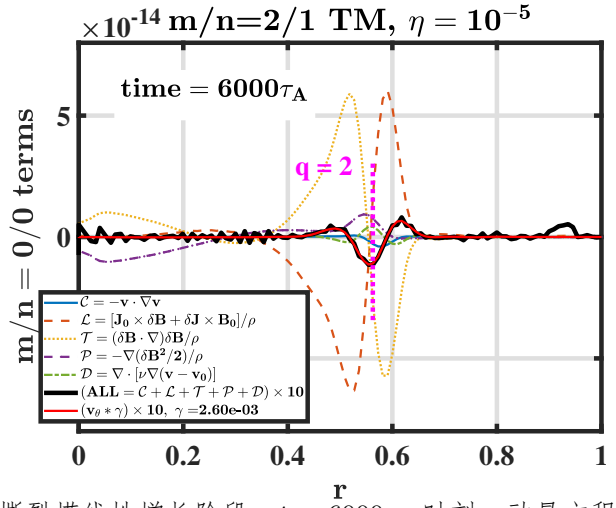

图 5.24 **撕裂模算例**中，撕裂模线性增长阶段，$t=6000\tau_A$ 时刻，动量方程的不同线性和非线性项对 $m/n=0/0$ 带状流极向分量 v_θ 的贡献。$m/n=0/0$ 带状流极向分量 v_θ 的增长率约为 $2.60\times10^{-3}\tau_A$，粉色点线标出 $q=2$ 有理面位置。

根据上述讨论，撕裂模演化过程中，除了产生一定幅值的 $n=0$ 带状流分量 (主导极向模数为 $m=1$)，还会非线性耦合出 $n=0$ 的带状磁场和带状电流。因此在图5.25中，我们分解出撕裂模线性增长阶段耦合产生的 $n=0$ 扰动磁场和扰动电流分布。可以看到，$n=0$ 的带状磁场和带状电流的主导性极向模数均为 $m=0$，呈现较好的极向对称分布，且局域分布于 $q=2$ 有理面。此外，图5.25 (c) 和 (d) 中带状电流在 $q=2$ 有理面附近存在极强的反剪切分布，导致平衡电流的径向梯度下降。相对应的，图5.25 (a) 和 (b) 中带状磁场则在 $q=2$ 有理面附近产生单调的变化。对于初始环向平衡磁场，其方向为正，而扰动产生的环向带状磁场大于零，对应 $q=2$ 有理面环向磁场的增强；而初始极向平衡磁场的方向为负，因此大于零的极向带状磁场则使得 $q=2$ 有理面极向磁场减弱，两者共同导致环向对称磁场径向剪切的下降。此处撕裂模非线性耦合产生环向和极向对称带状磁场和带状电流的过程相当于对平衡磁场位型产生修正。

此外，通过对撕裂模非线性饱和阶段环向对称的总磁场 $(\mathbf{B}_0+\delta\mathbf{B}^{n=0})$ 进行磁力线追踪，可以得到磁场安全因子随时间的演化。如图5.26所示，在图5.2对应的撕裂模饱和阶段，$\varphi=0$ 截面上 $q=2$ 有理面附近撕裂模上下两个 X 点的安全因子存在明显的变平，且随着时间的演化 (从 $t\sim9337\tau_A$ 到 $106598\tau_A$)，安全因子的变平程度明显增加。图5.26中撕裂模饱和阶段安全因子的平化现象也与图5.25所示的带状磁场和带状电流相符。而 $n=0$ 带状流分量 (包括带状流、带状磁场和带状电流) 对平衡的修正也导致了的 $m/n=2/1$ 撕裂模

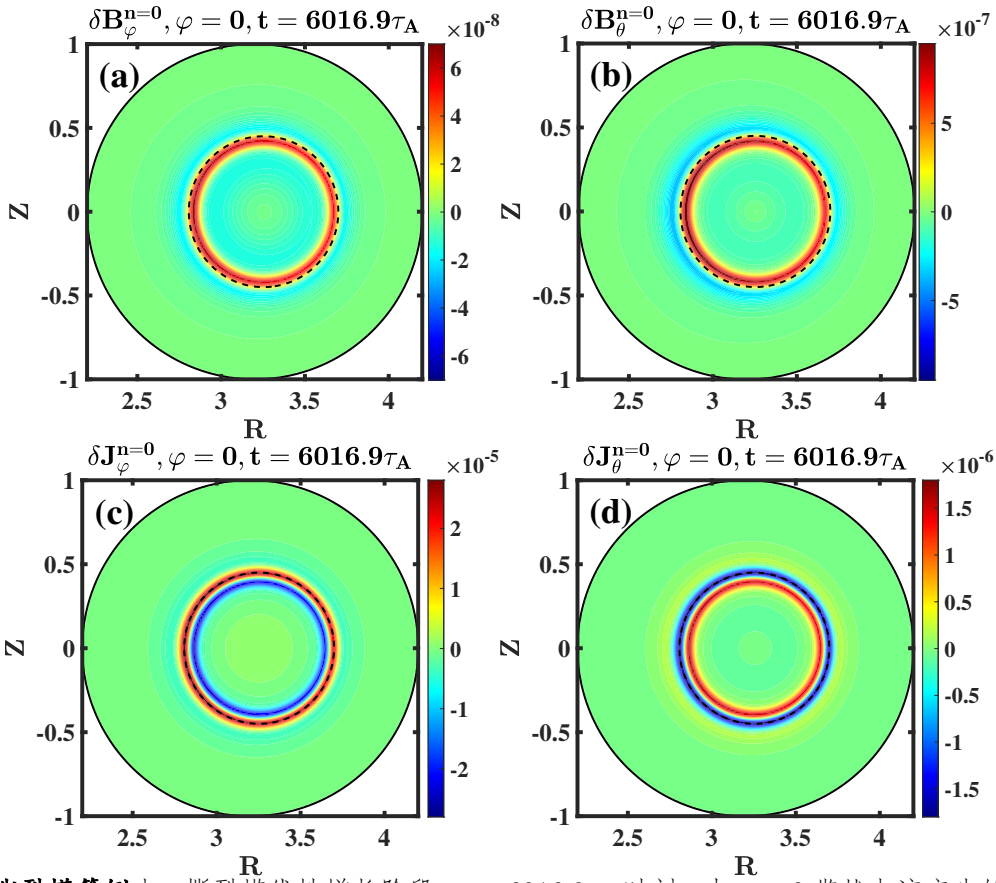

图 5.25 **撕裂模算例**中，撕裂模线性增长阶段，$t = 6016.9\tau_A$ 时刻，由 $n = 0$ 带状电流产生的带状磁场和带状电流二维模结构分布，分别为：(a) 环向扰动磁场 $\delta\mathbf{B}_\varphi^{n=0}$；(b) 极向扰动磁场 $\delta\mathbf{B}_\theta^{n=0}$；(c) 环向扰动电流 $\delta\mathbf{J}_\varphi^{n=0}$；(b) 极向扰动电流 $\delta\mathbf{J}_\theta^{n=0}$。虚线标出 $q = 2$ 有理面位置，初始平衡的环向磁场 $B_{\varphi 0}$ 符号为正，而极向磁场 $B_{\theta 0}$ 符号为负。

不稳定性指数 Δ' 的下降，进而导致 $m/n = 2/1$ 撕裂模达到稳定条件，并进入饱和阶段。作为对比，在图5.26中的棕色点框线也可以看到，如果在非线性模拟中滤掉 $n = 0$ 扰动量，环向对称磁场分量的安全因子始终与初始状态相同，不会发生任何演化。而 $m/n = 2/1$ 撕裂模不稳定性指数 Δ' 保持不变，并导致 $n = 1$ 撕裂模的动能持续增长，无法达到饱和状态，如图5.2黑色点线所示。根据公式4.31和4.32，我们可以在忽略等离子体扰动流的情况下，定量估算由于图5.25所示 $n = 0$ 的扰动磁场和扰动电流导致的 Δ' 的变化：首先在线性阶段 ($t = 4149\tau_A$)，由于 $n = 0$ 分量远小于平衡量，$m/n = 2/1$ 撕裂模对应的 Δ' 为 23.1，与平衡场情况几乎一致；在非线性饱和初始阶段 ($t = 8506\tau_A$)，Δ' 下降到 14.9，对应图5.2中撕裂模增长率下降阶段；而在撕裂模基本非线性饱和之后 ($t = 9337\tau_A$)，Δ' 下降到 0.7，此时撕裂模几乎完全稳定，因此不再增长；在撕裂模非线性饱和后期 ($t = 10789\tau_A$)，Δ' 下降到-3.8，即对应撕裂模的稳定条件 $\Delta' < 0$；之后，Δ' 几乎保持不变，到模拟结束之前 ($t = 16598\tau_A$)，Δ' 约为-3.7，系统进入平衡状态。因此，通过上述分析，我们证明 $n = 0$ 带状流分量，特别是带状磁场和带状电流的产生对于撕裂模的非线性饱和起到决定性作用。

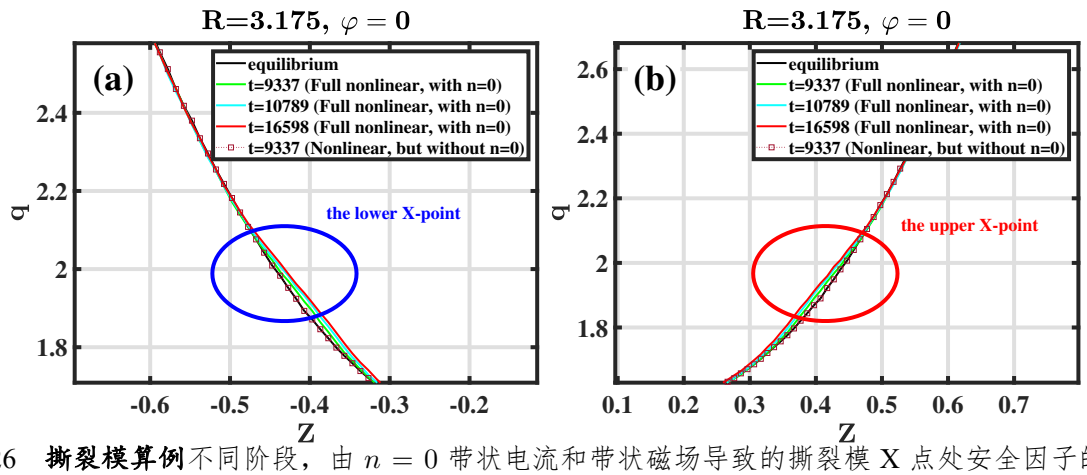

图 5.26 **撕裂模算例**不同阶段，由 $n = 0$ 带状电流和带状磁场导致的撕裂模 X 点处安全因子的变化，分别对应撕裂模的 (a) 上 X 点和 (b) 下 X 点。黑色实线对应初始平衡的情况，绿色、蓝色和红色实线分别对应非线性饱和之后不同时刻的情况，而棕色点框线表示非线性模拟中滤掉 $n = 0$ 分量后得到的 $t = 9337\tau_A$ 时刻的安全因子分布。**撕裂模算例**不同时刻的 Δ'：$t = 4149\tau_A$，$\Delta' \simeq 23.1$；$t = 8506\tau_A$，$\Delta' \simeq 14.9$；$t = 9337\tau_A$，$\Delta' \simeq 0.7$；$t = 10789\tau_A$，$\Delta' \simeq -3.8$；$t = 16598\tau_A$，$\Delta' \simeq -3.7$。

5.5 撕裂模对高能量粒子激发 TAE 的影响

在这一节中，我们会简要讨论 $m/n = 2/1$ 撕裂模对高能量粒子共振激发 $n = 1$ TAE 的影响。首先，我们从图5.2对应的**撕裂模算例**中提取出饱和阶段 $m/n = 2/1$ 磁岛的物理量分布 (电场、磁场、电流密度、等离子体密度和速度场)，作为后续模拟的初始三维平衡条件，并将方程5.1对应的慢化分布高能量粒子引入初始条件中，来研究饱和 $m/n = 2/1$ 磁岛对高能量粒子激发 TAE 的影响。为减缓模拟中撕裂模的演化速度，我们采用较小的电阻率参数，即 $\eta = 10^{-7}$。并通过仔细扫描高能量粒子比压 β_h^c，我们得到该电阻率参数下，不包含饱和 $m/n = 2/1$ 磁岛时，$n = 1$ TAE 线性不稳定的高能量粒子比压 β_h^c 的临界值为 0.76%。本节的模拟分别考虑 $m/n = 2/1$ 饱和磁岛对平衡场下原先稳定 ($\beta_h^c < 0.76\%$) 和不稳定 ($\beta_h^c > 0.76\%$) 的 TAE 的影响。

首先，初始条件中我们不考虑饱和 $m/n = 2/1$ 磁岛，对于较大 β_h^c 参数 (2.34%)，如图5.27 (a) 所示，$n = 1$ 的 TAE 产生的振荡电场需要经过大约 $3500\tau_A$ 的线性增长阶段达到最大的饱和峰值。然而，当初始系统中存在饱和 $m/n = 2/1$ 磁岛的情况下，如图5.27 (b) 所示，$n = 1$ 的 TAE 被高能量粒子迅速激发并在更短的时间尺度内 ($t \approx 800$) 达到饱和状态，呈现爆发增长的态势。除此之外，我们考虑低于 TAE 不稳定性阈值的高能量粒子比压，即 $\beta_h^c = 0.71\%$，此时，初始不考虑 $m/n = 2/1$ 磁岛的情况下，$n = 1$ TAE 是线性稳定的。如图5.27 (c) 所示，高能量粒子的存在使得扰动电场在相当长的时间尺度内都以 TAE 的本征频率 ($\omega \approx 0.053\omega_A$) 在很低的噪声水平振荡 ($\delta E_\theta \sim 10^{-12}$)，但并不能克服阻尼产生幅值的增长。然而，如图5.27 (d) 所示，在考虑初始 $m/n = 2/1$ 饱和磁岛之后，原先稳定的 $n = 1$ TAE 被高能量粒子迅速去稳，并在较短的时间尺度内 ($t \approx 1500\tau_A$) 增长到较高的

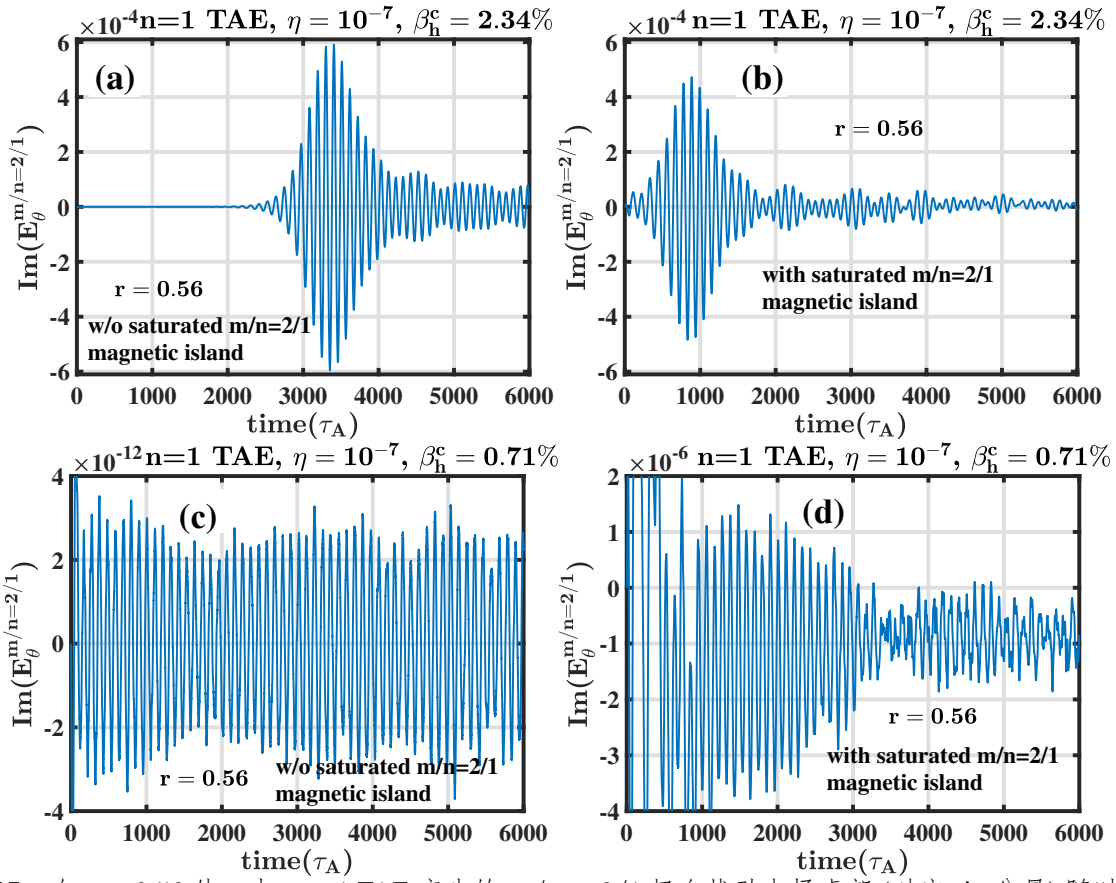

图 5.27 在 $r = 0.56$ 处，由 $n = 1$ TAE 产生的 $m/n = 2/1$ 极向扰动电场虚部 (对应 sin 分量) 随时间的演化关系。左右分别对应不包含和包含初始饱和 $m/n = 2/1$ 磁岛的情况，上下分别对应较高和较低的高能量粒子比压，即 $\beta_h^c = 2.34\%$ 和 0.71%。无饱和 $m/n = 2/1$ 磁岛的初始平衡场中，在这两个 β_h^c 参数下，$n = 1$ TAE 分别是不稳定的和稳定的。

饱和幅值 ($\delta E_\theta \sim 10^{-6}$)，随后由于系统阻尼机制以及高能量粒子分布函数的改变，TAE 幅值下降到较低的水平。因此，系统中初始存在的 $m/n = 2/1$ 饱和磁岛会导致原先不稳定 TAE 的爆发和原先稳定 TAE 的共振去稳。

为了理解上述过程中，$m/n = 2/1$ 饱和磁岛对 TAE 的激发和去稳产生的影响，我们在图5.28中给出对于图5.27 (d) 的算例 ($\beta_h^c = 0.71\%$，初始包含 $m/n = 2/1$ 饱和磁岛)，高能量粒子 (扰动) 分布函数在相空间 $\{\langle\psi\rangle, \varepsilon\}$ 和径向的分布情况。在图5.28 (a) 中，在很短的时间尺度内 ($t = 300\tau_A$)，由于通行高能量粒子 ($\Lambda = 0.25$) 和 $m/n = 2/1$ 磁岛之间 $p = 2$, $n = 1$ 的共振产生大约 $\delta f/f \sim 10\%$ 量级的分布函数改变。而 $m/n = 2/1$ 饱和磁岛和通行高能量粒子的共振导致共振位置 (对应径向 $q = 2$ 有理面附近) 高能量粒子总分布函数的展平，如图5.28 (b) 和 (c) 所示。从而，在 $m/n = 2/1$ 磁岛内外两侧，高能量粒子分布函数关于径向的梯度 $\partial f/\partial r$ 存在明显的增强。如图5.28 (d) 所示，在 $r \approx 0.4$ 和 0.6 的位置，磁岛对高能量粒子的再分布导致高能量粒子分布函数的径向梯度增大到初始情况 ($\partial f_0/\partial r$) 的两倍以上。根据第2.3节的讨论，共振高能量粒子对 TAE 的驱动强度正比于高

能量粒子分布函数径向的梯度，即 $\gamma \propto \partial_\varepsilon f|_{\varepsilon'} = -f/T\,(1 - n\omega_*/\omega)$ (对应公式2.48)，其中 $\omega_* = qT/Z_h erB \cdot \partial_r \ln f$[57]。而由于 $m/n = 2/1$ 磁岛使得高能量粒子分布函数径向梯度的增强增大了高能量粒子对 TAE 的共振去稳效应，并降低激发 TAE 所需的高能量粒子比压阈值条件，从而使得平衡场下不稳定的 TAE 产生爆发增长的现象，而原先稳定的 TAE 则更容易被再分布后的高能量粒子共振去稳。

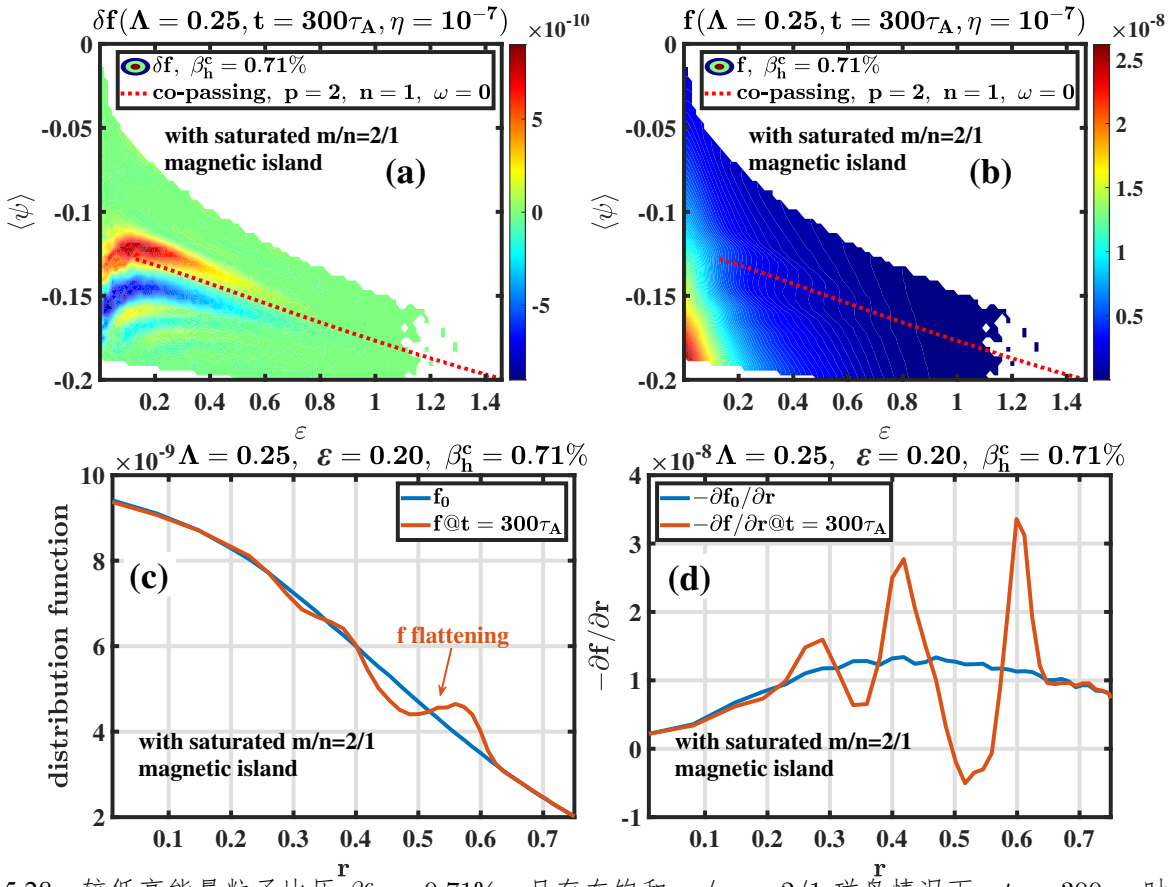

图 5.28　较低高能量粒子比压 $\beta_h^c = 0.71\%$，且存在饱和 $m/n = 2/1$ 磁岛情况下，$t = 300\tau_A$ 时刻，高能量粒子的分布函数。分别对应：(a) 高能量粒子扰动分布函数 δf 在相空间 $\{\langle\psi\rangle, \varepsilon\}$ 的二维分布 ($\Lambda = 0.25$)，红色点线表示撕裂模和通行高能量粒子的 $p = 2$, $n = 1$ 的共振条件；(b) 高能量粒子总分布函数 f 在相空间 $\{\langle\psi\rangle, \varepsilon\}$ 的二维分布 ($\Lambda = 0.25$)，红色点线表示撕裂模和通行高能量粒子的 $p = 2$, $n = 1$ 的共振条件；(c) 高能量粒子总分布函数 f 在径向的分布 ($\Lambda = 0.25$, $\varepsilon = 0.20$)，蓝色和橙色实线分别表示初始时刻和 $t = 300\tau_A$ 时刻；(c) 高能量粒子总分布函数 f 的径向梯度 $\partial f/\partial r$ 在径向的分布 ($\Lambda = 0.25$, $\varepsilon = 0.20$)，蓝色和橙色实线分别表示初始时刻和 $t = 300\tau_A$ 时刻。

5.6　小结

在这一章中，我们主要讨论了 $n = 1$ 的高频 TAE 与 $m/n = 2/1$ 低频撕裂模之间的非线性相互作用，包括撕裂模和 TAE 的非线性演化、带状流分量的不同产生机制及其对系统非线性饱和的影响、撕裂模对高能量粒子的再分布过程以及对 TAE 共振激发的影响等。首先，撕裂模的存在对 TAE 饱和幅值和模结构都产生较大影响，特别是 TAE 非线性饱和之

后，TAE 存在一个更缓慢的衰减过程，从而 TAE 最终稳定在相对更高的饱和水平。在撕裂模和 TAE 非线性相互作用的模拟中，另一个重要的现象是观察到了 $m/n = 0/0$ 分量为主的环向对称零频带状流的二次激发，该激发过程主要同步发生在撕裂模接近饱和的阶段。该二次激发的带状流幅值远大于撕裂模和 TAE 的饱和水平，最终成为系统中主导性的模式。撕裂模和 TAE 非线性相互作用中第二阶段带状流的产生机制主要来自于 $m/n = 2/1$ 磁岛对通行高能量粒子的再分布效应和系统的非线性耦合。再分布后的高能量粒子压强在极向存在明显的 $m = 2$ 模结构分布，并在 $q = 2$ 有理面附近存在较强的径向输运现象。$q = 2$ 有理面内外两侧带状流方向完全相反，其中，$q = 2$ 有理面以内，带状流主要沿着离子抗磁漂移方向，而在 $q = 2$ 有理面以外，带状流主要沿着电子抗磁漂移方向。带状流和撕裂模对 TAE 的模结构产生明显调制现象，包括径向 TAE 模结构的展宽，以及 $m = 3$ 和 4 分量由于带状流的剪切受到抑制。

从相空间来看，撕裂模对高能量粒子的再分布主要体现为 $m/n = 2/1$ 磁岛与通行高能量粒子之间 $p = 2$, $n = 1$, $\omega = 0$ 的共振，而捕获粒子未与磁岛产生明显相互作用现象。撕裂模对高能量粒子的共振再分布效应主要对带状流和 TAE 的非线性演化产生两个影响：首先，若 TAE 在强撕裂模活动发生之前达到饱和状态，则撕裂模对高能量粒子再分布后的扰动压强/电流可以对背景粒子产生持续的 $n = 1$ 的驱动，且驱动效应长时间稳定存在，并由于磁流体的非线性磁张力项耦合产生 $m/n = 0/0$ 的带状流分量。当系统的粘滞效应对带状流产生的阻尼强度与非线性驱动可比时，该 $m/n = 0/0$ 的带状流分量达到饱和。此外，如果由撕裂模产生的高能量粒子再分布过程在 TAE 被激发之前发生，则撕裂模活动倾向于增强高能量粒子径向的不均匀性，从而提高共振高能量粒子对 TAE 的驱动强度。从而，在较大高能量粒子比压参数下，平衡场中原先不稳定的 TAE 可以在更短的时间尺度内爆发增长并达到饱和；而较低高能量粒子比压参数下，原先稳定的 TAE 更容易被共振去稳。TAE 由于撕裂模对高能量粒子再分布后的激发过程同样伴随着较强幅值的 $n = 0$ 带状流分量的产生，该带状流分量反过来也可以影响 TAE 的最终饱和过程。

而 TAE、各向同性高能量粒子以及上述的主导性带状流分量对撕裂模的非线性演化影响较小。其中，高能量粒子的引入在撕裂模线性阶段主要驱动 $m/n = 2/1$ 磁岛在离子抗磁漂移方向以接近当地 ($q = 2$ 有理面) 高能量粒子的离子抗磁漂移频率旋转。而在撕裂模的非线性阶段，由于 $q = 2$ 有理面高能量粒子分布函数径向梯度的减小，离子抗磁漂移频率下降至零，撕裂模从而稳定在固定相位。而这一过程中，撕裂模的非线性饱和幅值和饱和磁岛宽度与无高能量粒子/TAE 的情况几乎相同，这可能是由于同向和反向通行高能量粒子对撕裂模的致稳和去稳效应相互抵消。而高频的 TAE 和零频的带状流分量并未和撕裂模发生明显的多模耦合过程，因此对撕裂模最终饱和幅值的影响较小。

作为对比，本章也详细分析了由 TAE 和撕裂模各自非线性耦合产生带状流分量的物理过程。其中，TAE 在其线性增长阶段，$n = 0$ 带状流的增长率为 TAE 主模的两倍，其模

结构在径向分布上非常集中。对于本章的模拟结果，带状流主要产生于 $m/n = 2/1$ EPM 分量的极大值处，以及 $m = 2$ 和 3 的剪切阿尔芬波连续谱耦合而成的 $n = 1$ TAE 间隙。此外，TAE 激发带状流的模拟结果显示，该带状流分量主要由背景等离子体的非线性对流项和非线性磁张力项驱动产生，这两项在径向上主要分布于带状流的峰值位置附近，且彼此之间存在非常强烈的抵消效应。因此，非线性对流项和非线性磁张力项只在非常有限的径向宽度内对 $m/n = 0/0$ 带状流产生较弱的净驱动效应，这也导致了 TAE 模拟中，$n = 0$ 带状流的饱和幅值相对较小。另外，TAE 线性增长阶段激发的带状流极向模结构主要由 $m = 0$ 和 $m = 1$ 两部分组成，弱场侧带状流强度较大，而强场侧较小，这与 TAE 强度的极向分布一致。尽管 TAE 驱动产生的 $n = 0$ 带状流幅值较弱，但由于其径向的局域性分布，可以产生较强的极向剪切，从而在一定 TAE 强度下，降低 TAE 的非线性饱和幅值[123,124]。

对于撕裂模，在其线性增长阶段，$n = 0$ 带状流的增长率同样为撕裂模主模的两倍。模结构上，$n = 0$ 的带状流分量主要由 $m = 1$ 分量占据主导，并同时存在较强的 $m = 2$ 分量，而极向对称的 $m = 0$ 带状流分量则可以忽略不计。因此，撕裂模耦合产生的带状流分量呈现明显的极向不对称分布，$m = 1$ 的流场主要集中分布于 $q = 2$ 有理面的上下对称位置，并在中平面上幅值最弱。径向上，由于撕裂模产生的带状流分量分布十分局域，因此同样存在非常强的径向剪切，这与撕裂模本身的局域性质有关。而对于极向对称的 $m/n = 0/0$ 带状流分量，其耦合机制主要来源于系统对 $n = 0$ 扰动带状电流和带状磁场的线性响应项，以及由 $n = 1$ 撕裂模扰动磁场产生的非线性磁张力耦合项。这两项的径向分布主要集中于 $q = 2$ 有理面两侧，并且与 TAE 激发带状流的情况类似，上述的线性响应项和非线性磁张力项同样存在几乎反向对称的分布，且强度相当，因此产生显著的抵消效应，最终只在 $q = 2$ 有理面附近有非常弱的净驱动效应，并导致撕裂模非线性模拟得到的 $m/n = 0/0$ 带状流幅值远小于 $m = 1$ 和 2 的极向非对称分量。尽管如此，撕裂模的非线性饱和主要由 $m/n = 0/0$ 带状电流和带状磁场决定，撕裂模非线性饱和过程中，带状电流和带状磁场的产生导致平衡磁场和电流在 $q = 2$ 有理面附近产生演化，主要趋势为磁场 (也包括安全因子和平行电流) 的径向剪切减弱，从而使得撕裂模不稳定性指数 Δ' 下降，并导致撕裂模最终达到饱和状态。

包含撕裂模、剪切阿尔芬波和高能量粒子活动的托卡马克放电中，可能存在非常复杂的模耦合和高能量粒子损失/再分布过程。而剪切阿尔芬波不稳定性、撕裂模和高能量粒子的损失/再分布过程可以分别驱动出完全不同的 $n = 0$ 带状流分量。达到足够幅值的带状流分量通过对平衡的修正以及对不同等离子体不稳定性的抑制等过程，可以提高等离子体的约束性能。由于托卡马克中剪切阿尔芬波等由高能量粒子激发的高频不稳定性和撕裂模等低频磁流体不稳定性十分普遍，并考虑到带状流对剪切阿尔芬波和漂移波湍流等不稳定性非线性演化/饱和的显著影响，探索和理解托卡马克中可能发生的带状流产生机制对未来燃烧等离子体研究具有重要意义。

6 总结和展望

6.1 论文总结

本论文工作中，我们对磁流体模拟程序 CLT 和磁流体-动理学混合模拟程序 CLT-K 进行了较大规模的开发和完善。对于 CLT 程序，主要包括程序数值边界处理的优化、对实验位型平衡的支持，以及对 EAST 和 HL-2A 托卡马克共振磁扰动模块的开发等；对于 CLT-K 程序，在电流耦合方式的基础上，我们拓展了压强耦合方式，并通过对多组不同问题的线性和非线性模拟，严格校验了两种耦合方式在不同条件下的一致性，从而确保 CLT-K 程序对电流或压强耦合模型在不同近似下的合理使用。此外，我们还拓展了 CLT-K 程序的并行方案和粒子采样方式，并结合异构编程将 CLT 和 CLT-K 程序成功移植到 GPU 设备上，极大地提高了程序的计算效率。

在此基础上，我们首先利用 CLT-K 程序模拟研究了高能量粒子对磁流体不稳定性线性性质的影响，主要包括 $m/n = 1/1$ 内扭曲模和 $m/n = 2/1$ 撕裂模。对于 $m/n = 1/1$ 内扭曲模，我们分别在理想磁流体和考虑各向同性高能量粒子的两种情况下，模拟了 $m/n = 1/1$ 内扭曲模线性增长率对背景等离子体和高能量粒子比压的依赖关系，证明了 CLT 和 CLT-K 程序线性模拟结果的可靠性。其次，我们系统性讨论了不同分布函数高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性性质的影响。首先，高能量粒子的平行惯性项在撕裂模的线性模拟中影响不大，主要在定量上对同向通行高能量粒子的模拟结果有一定影响。撕裂模线性稳定性方面，同向通行高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模主要起弱致稳作用，反向通行高能量粒子则主要对 $m/n = 2/1$ 撕裂模产生弱去稳作用。这部分通行高能量粒子的模拟结果也与蔡辉山教授的理论和模拟工作一致[193,202]。此外，我们也讨论了捕获高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响，发现捕获高能量粒子主要起弱致稳作用。与此同时，CLT-K 程序的模拟结果表明，高能量粒子的绝热和非绝热响应在不同分布函数下对撕裂模的线性稳定性有完全不同的影响。

除高能量粒子对 $m/n = 2/1$ 撕裂模线性稳定性的影响外，我们还讨论了不同分布函数高能量粒子在比压超过阈值之后对 $m/n = 2/1$ EPM 的共振激发过程。捕获高能量粒子共振激发 $m/n = 2/1$ EPM 的过程在张小西博士等人的理论工作中已得到证明[199]。但在其工作中，由于考虑通行高能量粒子轨道宽度较小，使得通行高能量粒子对 $m/n = 2/1$ EPM 的非绝热共振激发效应较弱。在我们的模拟中，通行高能量粒子对 $m/n = 2/1$ EPM 同样具有明显的共振激发效果，特别是同向通行高能量粒子，其激发 $m/n = 2/1$ EPM 的高能

量粒子比压阈值远低于反向通行和捕获高能量粒子。同向通行高能量粒子和该 $m/n=2/1$ EPM 主要满足 $n=1,\ p=1$ 的共振条件，由于所选取的高能量粒子能量范围的差异，该共振情况与朱霄龙博士和陈伟研究员发现的 $n=1,\ p=2$ 共振有一定区别[205]。而反向通行高能量粒子和捕获高能量粒子与 $m/n=2/1$ EPM 分别满足 $n=1,\ p=3$ 和 $n=1,\ p=0$ 的共振条件。除 $m/n=2/1$ EPM 外，反向通行高能量粒子还共振激发产生芯部的 $m/n=2/1$ 高频 GAE，共振条件满足 $n=1,\ p=3$，其激发阈值也远低于 $m/n=2/1$ 的 EPM。因此在反向通行高能量粒子模拟中，撕裂模、GAE 和 EPM 可以在不同参数区间下成为主导模式。$m/n=2/1$ EPM 被共振激发的同时，也导致芯部通行高能量粒子产生明显的径向输运，其中，对于反向通行高能量粒子尤为明显。

上述工作主要针对撕裂模和 EPM 的线性问题进行数值模拟和分析，而实际托卡马克实验中的绝大部分物理现象均来自于等离子体的非线性过程。因此在第5章的工作中，我们详细探讨了 $m/n=2/1$ 低频撕裂模和 $n=1$ 高频 TAE 相互作用的强烈非线性过程，模拟发现撕裂模对 TAE 和高能量粒子演化具有显著的影响。首先，TAE 的非线性饱和幅值和模结构受到撕裂模明显调制，可能的原因主要有两点：第一点，饱和磁岛对高能量粒子在极向和径向均产生明显的再分布现象。其中在径向的再分布使得高能量粒子驱动强度在磁岛边缘增强，并导致 TAE 非线性饱和阶段模结构径向分布的变化。此外，初始系统中存在的饱和磁岛对高能量粒子再分布效应极大程度上增强了后者对 TAE 的共振激发作用。第二点与 $n=0$ 带状流的产生有关，在撕裂模饱和阶段，系统中 $n=0$ 的带状流产生明显的二次增长，其幅值甚至超过 $n=1$ 的 TAE 和撕裂模主模分量，成为系统主导的模式。该 $n=0$ 带状流主要为零频分量的 $m=0$ 极向对称剪切流，带状流在 $q=2$ 有理面附近存在明显的反剪切分布，并在一定程度上调制了 TAE 的非线性饱和模结构。

在此基础上，我们分别讨论了撕裂模和 TAE 非线性相互作用过程中在不同阶段产生的带状流特点和耦合机制。首先，对于撕裂模饱和阶段产生的第二阶段主导性零频带状流，我们发现其产生机制与高能量粒子的再分布紧密相关。再分布后的高能量粒子扰动压强或者扰动电流对系统产生较强的驱动效应，并通过磁流体的非线性耦合过程，在离子抗磁漂移方向驱动极强的 $m/n=0/0$ 带状流。而 TAE 激发的带状流在极向具有明显的不对称性，并在径向具有局域的强剪切分布。TAE 对该带状流的不同非线性驱动在径向分布上存在很强的抵消效应，因此对带状流的驱动效应较弱。即便如此，该带状流对 TAE 的非线性饱和过程有重要的影响。此外，撕裂模线性增长阶段激发的带状流在极向以 $m=1$ 分量为主，并局域分布于 $q=2$ 有理面附近。撕裂模对极向对称带状流的不同非线性驱动项同样存在明显的互相抵消效应，因此带状流幅值较弱。此外，撕裂模非线性饱和阶段在 $q=2$ 有理面附近产生较强幅值的 $m/n=0/0$ 带状电流和带状磁场，导致撕裂模不稳定性指数 Δ' 产生明显的下降并最终小于零，从而使撕裂模进入非线性饱和状态。因此，撕裂模产生的 $n=0$ 带状流分量对于其非线性饱和过程起决定性作用。

综上所述，托卡马克燃烧等离子中存在丰富的高能量粒子、撕裂模和不同剪切阿尔芬波不稳定性的活动。不同分布函数高能量粒子对内扭曲模和撕裂模线性稳定性的影响为我们在未来 ITER 等聚变示范堆级托卡马克中控制磁流体不稳定性提供参考思路。而高能量粒子对 EPM 和 TAE 等剪切阿尔芬波不稳定性存在较为普遍的共振激发作用。EPM 的活动也严重威胁了高能量粒子的约束，因此需要对这些剪切阿尔芬波不稳定性的性质，特别是共振激发和非线性饱和机制做全面深入的研究。此外，带状流、带状电流和带状磁场等环向对称分量不仅对漂移波湍流等微观不稳定性具有明显的抑制作用，而且对宏观尺度的磁流体不稳定性和剪切阿尔芬波不稳定性的非线性饱和过程有重要的影响。因此，深入理解不同条件下带状流分量的产生机制和模式特点，并详细探究带状流分量对系统非线性饱和和等离子体约束的影响，对燃烧等离子体物理和磁约束聚变的发展具有重要的意义。

6.2 论文不足与下一步工作计划

本论文所开展的模拟研究工作在仍有一定的局限性。首先，本论文的研究工作主要讨论的是单一低模数的剪切阿尔芬波不稳定性。在 ITER 等装置中，最不稳定的剪切阿尔芬波将主要以高-n 分量为主 ($n \gtrsim 10$)，且可以同时有多支不同环向模数的剪切阿尔芬波被高能量粒子共振激发。因此，在下一步工作中，我们需要对多模、高-n 剪切阿尔芬波的共振激发和非线性饱和过程做深入的研究，特别是不同环向模数的剪切阿尔芬波同时存在情况下的非线性耦合过程、对高能量粒子约束的影响，以及高-n 剪切阿尔芬波与低-n 磁流体不稳定性的非线性相互作用过程。另外，本论文对高能量粒子物理的分析主要针对的仍是高能量粒子相空间特征，包括高能量粒子和波的共振条件以及分布函数的演化等，缺少对波与波非线性耦合的分析，而后者在多模模拟中对系统的演化有可能产生同样重要的影响，因此需要对多模物理从相空间和模耦合等多个角度进行深入分析。另一方面，高-n 剪切阿尔芬波的模拟对程序的计算效率和数值稳定性均提出了更高的要求，因此需要在技术层面探索更高效的并行方案和数值算法，从而实现对托卡马克中高-n 剪切阿尔芬波不稳定性的高效模拟。

此外，本论文的模拟工作未考虑高能量粒子的源和汇等效应，因此，模拟结果主要反应的是高能量粒子平衡分布函数中的自由能对不同不稳定性的影响。而在实际的燃烧等离子体问题中，高能量粒子受到的碰撞效应以及聚变过程和辅助加热对高能量粒子的补充效应会显著影响相空间高能量粒子分布函数的演化，并进一步影响剪切阿尔芬波不稳定性的激发和饱和过程。在祝佳博士的 TAE 模拟工作中，已初步考虑碰撞效应对 TAE 的影响，并发现源和汇对 TAE 的爆发现象起决定性作用[109]。因此，我们将在现有模型基础上，合理考虑高能量粒子的碰撞算符和分布函数源项，从而以更接近真实托卡马克运行情况的模拟条件研究高能量粒子对高-n 剪切阿尔芬波的激发过程，以及剪切阿尔芬波的长时间非线性演化的物理过程。

关于数值模拟程序，本论文虽然仔细校验了电流耦合和压强耦合模型在不同条件下的

等价性，但论文中绝大部分模拟工作仍基于传统的简化形式扰动电流或扰动压强耦合方程。在这种情况下，我们考虑了高能量粒子扰动分布函数的完整贡献，但忽略了高能量粒子平衡分布函数对磁场扰动的响应。在强非线性物理过程中，特别是撕裂模等问题中，托卡马克磁面的演化对模拟结果可能产生较大的影响。因此，我们需要在现有模拟结果基础之上，采用更加严格的完整形式压强或者电流耦合模型，并在初始等离子体平衡中自洽包含高能量粒子的平衡压强和电流贡献，从而对相关物理问题得到更加可靠的定量模拟结果，包括但不限于撕裂模的线性稳定性以及剪切阿尔芬波和撕裂模的非线性饱和过程等。

数值模拟研究对于理解燃烧等离子体中可能发生的高能量粒子物理具有重要的意义，特别是对未来 ITER 等装置的顺利运行可以起到预测评估和辅助指导的作用。CLT 和 CLT-K 程序在物理模型和数值算法上仍有许多可以改进的地方。为了更加自洽地模拟未来托卡马克燃烧等离子体中丰富的高能量粒子物理，我们将在今后的工作中采用尽可能贴近实验情况的等离子体参数和几何位型，并考虑高能量粒子的源和汇等效应，使用更严谨的压强或电流耦合模型进行数值模拟研究。同时结合波-粒子相空间非线性相互作用和多模耦合等波-波等非线性机制，讨论高能量粒子驱动下磁流体不稳定性的线性和非线性物理、高-n 剪切阿尔芬波不稳定性的长时间演化和带状流分量的非线性激发过程等物理问题，以及不同等离子体不稳定性对高能量粒子约束和输运产生的影响。

附录 A　CLT 与 CLT-K 程序的 GPU 移植介绍

CLT(-K) 程序的计算流程如图3.2所示，主要分为两类模块，第一类为主要在 CPU 执行的红色模块，包括：i. 初始化 (INITIAL)、ii. 诊断和输入/输出 (DIAGN & OUTPUT)，以及 iii. 程序结束内存释放等 (FINISH)；第二类为蓝色方框对应的程序核心计算模块，包括：i. 变量求导 (DERIVATIVE OF ρ, p, $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$)、ii. 电流和电场计算 ($\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$)、iii. 计算方程组右端项 (RIGHT HANDS OF EQUATIONS)、iv. 边界处理 (BOUNDARY)、v. 自适应时间步长计算 (TIME STEP)、vi. 时间推进 (STEP ON)，以及 vii. CLT-K 程序中的 PIC 模拟 (PIC Solver) 等。上述第二类核心计算模块占据 CLT(-K) 程序运行的绝大部分时间，因此不同类型的 OpenACC[208] 指令被用来在 GPU 加速这部分代码，见图3.2绿色方框[183]。本附录中，我们简要介绍 CLT(-K) 程序在 GPU 上的移植工作，针对不同 OpenACC 指令在 CLT(-K) 程序各个模块中的使用方式给出范例和说明。在 Fortran 程序中，OpenACC 指令均以"!$acc" 开头的语句出现，该指令只在编译器打开 OpenACC 编译选项 (-acc) 的情况下生效，否则编译器将其识别为注释语句，不参与程序编译和运行。

范例 A.1　CLT 程序中"enter data"和"update"指令的使用方式。

```
PROGRAM CLT
! INITIALIZE
CALL INITIAL
!$acc enter data copyin(xx, yy, zz)
! MAIN ITERATION PART
DO NSTEP = 1, NSTEP
        CALL STEPON
        IF (MOD(NSTEP,NDIAGN) == 0) THEN
                !$acc update host(xx, yy, zz)
                CALL DIAGN
        ENDIF
        IF (MOD(NSTEP,NOUTPUT) == 0) THEN
                !$acc update host(xx, yy, zz)
                CALL OUTPUT
        ENDIF
ENDDO
!$acc exit data delete(xx, yy, zz)
END PROGRAM CLT
```

GPU 计算的关键是通过将核心计算任务从 CPU 迁移到 GPU 提高程序的并行度和计算效率。由于 CPU 以及 GPU 计算核心与内存之间的访问频率和带宽都远小于 GPU 内部的访存操作，因此，我们首先需要将变量从内存复制到 GPU 显存中。如范例A.1所示，在 CLT 程序执行完初始化 (INITIAL) 后，我们使用"!$acc enter data copyin (variable name list)" 指令将程序计算过程中用到的所有变量复制到 GPU 显存中。程序计算结束之后，还需使

用“!$acc exit data delete (variable name list)”指令来释放 GPU 显存。相比于单一的“copy”指令，“enter data”指令的主要优点是可以使 GPU 显存中数据的生命周期跨越不同函数 (FUNCTION) 和子程序 (SUBROUTINE)。该特性使计算任务在 GPU 上可以不间断地进行，从而避免内存和 GPU 显存之间频繁的数据传输。OpenACC 中可以实现“enter data”类似功能的指令还有“declare create”，后者在 GPU 显存开辟新的变量地址，一般在变量声明完成之后立即使用，并需要在程序初始化后结合“update”或“copy”指令将内存上的变量值更新到 GPU 显存中。由于 CLT 程序的计算过程中还需要使用诊断和输入/输出 (DIAGN & OUTPUT) 模块，这些模块程序结构较为复杂，涉及到 MKL (Math Kernel Library)[209] 数学库，但使用次数和计算量较小，适合在 CPU 调用。因此，在范例A.1中，我们使用“!$acc update host (variable name list)”指令将诊断和输入输出模块中用到的变量更新到内存地址上。由于这些模块调用频率低，此处由“update”指令造成的数据传输耗时相对于整体计算任务可以忽略不计。

范例 A.2　CLT 程序中“parallel”和“reduction”指令的使用方式。

```
1   SUBROUTINE SETDT
2   USE DECLARE
3   INCLUDE 'MPIF.H'
4   DT1=100.d0
5   !$acc parallel present(x, xx, yy, zz)
6   !$acc loop reduction(min:dt1) independent collapse(3)
7   DO JY = IY_FIRST + 2, IY_LAST - 2
8   DO JZ = IZ_FIRST + 2, IZ_LAST - 2
9   DO JX = IX_FIRST + 2, IX_LAST - 2
10      VX=X(JX,JZ,JY,3)
11      VY=X(JX,JZ,JY,4)
12      VZ=X(JX,JZ,JY,5)
13      VA2=(X(JX,JZ,JY,6)**2+X(JX,JZ,JY,7)**2+X(JX,JZ,JY,8)**2)/X(JX,JZ,JY,1)
14      CS2=GAMMA*X(JX,JZ,JY,2)/X(JX,JZ,JY,1)
15
16      VPX=DABS(VX)+SQRT(DABS(CS2+VA2))
17      VPY=DABS(VY)+SQRT(DABS(CS2+VA2))
18      VPZ=DABS(VZ)+SQRT(DABS(CS2+VA2))
19
20      DTX=DABS(XX(JX)-XX(JX-1))/(VPX/CFL)
21      DTZ=DABS(ZZ(JZ)-ZZ(JZ-1))/(VPZ/CFL)
22      DTY=DABS(XX(JX)*(YY(JY)-YY(JY-1)))/(VPY/CFL)
23
24      DT2=DMIN1(DTX,DTZ)
25      DT3=DMIN1(DTY,DT2)
26      DT1=DMIN1(DT1,DT3)
27  ENDDO
28  ENDDO
29  ENDDO
30  !$acc end parallel
31  RETURN
32  END SUBROUTINE SETDT
```

CLT 程序中存在大量对三维坐标网格指标的遍历，主要形式为三层以上的循环体，每一个网格的差分计算在一个循环体内基本是互相独立的，因此可以用线程并行的方式提高计算速度。如范例A.2所示的自适应时间步长计算模块 (TIME STEP)，由于需要对每一个点独立求解满足 CFL 稳定性条件的最小时间步长，因此使用了“!$acc parallel”或“!$acc kernel”指令来加速网格遍历计算。其中，“kernel”和“parallel”指令的主要区别在于：前

者给编译器更高的权限进行程序结构的分析，从而实现程序的自动并行化，而后者需要人为显式地指定并行层级和并行方式。范例A.2中的“present(variable name list)”指令告诉编译器 GPU 显存中已经存在的变量，避免对这部分变量进行重复的拷贝和更新操作 [也可以用“default(present)”指令替代“present(variable name list)”，表示默认情况下所有需要用到的变量在 GPU 显存中都已存在]；“loop”指令则表示对下方最近的循环强制并行化；“independent”指令显式地告诉编译器此处不同指标的计算任务是互相独立的；“collapse(3)”指令则表示将下方三层循环合并为一层，提高并行效率；而“reduction(min:dt1)”指令表示规约操作，即取各个网格点上得到的最小时间步长。规约操作往往用于求解全局极值与求和问题等，程序中根据需要也可以采用其他类型的规约操作[208]。

范例 A.3　CLT 程序中“routine”指令和子程序调用的使用方式。

```
SUBROUTINE INTERP1D2L(X1, X2, X3, Y1, Y2, Y3, Y, ANS)
!$acc routine seq
REAL*8 X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3,Y,ANS
REAL*8 D1,D2,D3
D1 = (Y1-Y2)*(Y1-Y3)
D2 = (Y2-Y3)*(Y2-Y1)
D3 = (Y3-Y1)*(Y3-Y2)
ANS = X1*(Y-Y2)*(Y-Y3)/D1 &
    + X2*(Y-Y3)*(Y-Y1)/D2 &
    + X3*(Y-Y1)*(Y-Y2)/D3

RETURN
END SUBROUTINE INTERP1D2L
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
SUBROUTINE BOUNDARY
USE DECLARE
IMPLICIT NONE
INCLUDE 'MPIF.H'

! INTERFACE FOR ACCELERATED SUBROUTINE
INTERFACE
    SUBROUTINE INTERP1D2L(X1, X2, X3, Y1, Y2, Y3, Y, ANS)
    !$acc routine seq
    REAL*8 X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3,Y,ANS
    REAL*8 D1,D2,D3,TMP_ADD
    END SUBROUTINE
END INTERFACE

! OpenACC ACCELERATED REGION
......
CALL INTERP1D2L(X1, X2, X3, Y1, Y2, Y3, Y, ANS)
......
! END OF OpenACC ACCELERATED REGION

END SUBROUTINE BOUNDARY
```

CLT 中使用的另一个重要的 OpenACC 指令为“!$acc routine”，该指令主要用于子程序调用环节。如范例A.3所示，在 CLT 程序边界处理 (BOUNDARY) 模块的 GPU 加速区域，存在大量对外部插值子程序 (SUBROUTINE INTERP1D2L) 的调用。针对这一问题，我们可以在被调用的插值子程序中添加“!$acc routine seq”指令，从而告诉编译器对该子程序进行串行编译，并在父级程序中添加被调用的插值子程序接口 (INTERFACE)，实现在 GPU 加速区域内对外部插值子程序的直接调用。

上面介绍的 OpenACC 指令主要针对串行部分代码共享内存形式的线程并行，而对于

范例 A.4　CLT 程序中第一种多 GPU 设备的 MPI 实现方式。

```
1   PROGRAM CLT
2    ......
3    ! INITIATE MPI
4   CALL MPI_INIT(IERROR)
5   CALL MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD, NSIZE, IERROR)
6   CALL MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD, NRANK, IERROR)
7    !$acc set device_num(NRANK)
8    ......
9    !MPI SEND------------------------------------------------------------
10   !$acc update host(wfx1)
11  CALL MPI_SEND(WFX1, MYZ8, MPI_DOUBLE_PRECISION, NRANK+1, 0, &
12                MPI_COMM_WORLD, IERROR)
13   ......
14   !MPI RECEIVE---------------------------------------------------------
15  CALL MPI_RECV(WFX1, MYZ8, MPI_DOUBLE_PRECISION, NRANK-1, 0, &
16                MPI_COMM_WORLD, IERROR)
17   !$acc update device(wfx1)
18   ......
19  END PROGRAM CLT
```

范例 A.5　CLT 程序中第二种多 GPU 设备的 MPI 实现方式

```
1   PROGRAM CLT
2    ......
3    ! INITIATE MPI
4   CALL MPI_INIT(IERROR)
5   CALL MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD, NSIZE, IERROR)
6   CALL MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD, NRANK, IERROR)
7    !$acc set device_num(NRANK)
8    ......
9    !MPI SEND------------------------------------------------------------
10   !$acc host_data use_device(wfx1) if_present
11  CALL MPI_SEND(WFX1, MYZ8, MPI_DOUBLE_PRECISION, NRANK+1, 0, &
12                MPI_COMM_WORLD, IERROR)
13   !$acc end host_data
14   ......
15   !MPI RECEIVE---------------------------------------------------------
16   !$acc host_data use_device(wfx1) if_present
17  CALL MPI_RECV(WFX1, MYZ8, MPI_DOUBLE_PRECISION, NRANK-1, 0, &
18                MPI_COMM_WORLD, IERROR)
19   !$acc end host_data
20   ......
21  END PROGRAM CLT
```

CLT 这样的大规模程序，往往需要结合使用 MPI 进行区域分解并行。在传统 CPU 集群上，我们可以直接使用 MPI 在多个计算核心或者计算节点之间进行数据通信。而在多 GPU 设备上运行的 OpenACC 加速程序中，我们首先需要使用“!$acc set device_num (MPI RANK)”指令将不同编号的 GPU 设备和 MPI 进程绑定；其次，需要采用额外的指令实现不同 GPU 显存之间的数据交互，范例A.4和A.5对这一问题给出两种解决方案。范例A.4的第一种方法通过使用“!$acc update host (variable name list)”指令将 GPU 显存中的变量更新到 CPU 端的内存上，再通过 CPU 调用“MPI_SEND”和“MPI_RECV”在不同 MPI 进程间进行数据交互，最后通过使用“!$acc update device (variable name list)”指令将 CPU 端的变量更新到 GPU 显存中，从而实现一次完整的 MPI 数据交互。范例A.5的第二种方法则直接在 GPU 显存地址上调用 MPI 进程实现数据交换，因此需要显式地告诉编译器使用 GPU

显存上的变量地址，即在 MPI 进程之前，添加“!$acc host_data use_device (variable name list) if_present”指令。上述两种方式的最终结果完全相同，但第二种方式可以避免 CPU 和 GPU 之间的数据复制造成并行效率的下降。

范例 A.6　CLT-K 程序中“atomic”原子操作指令的使用方式。

```
PROGRAM CALC_PRESSURE
. . . . . .
!$acc parallel default(present)
!$acc loop independent collapse(1)
DO P=1,N
    . . . . . .
    !$acc loop independent collapse(3)
    DO II=1,2
    DO JJ=1,2
    DO KK=1,2
        !$acc atomic update
        P_PERP(I-1+II,K-1+KK,J-1+JJ)=P_PERP(I-1+II,K-1+KK,J-1+JJ)+MARKER(P)%MU*MARKER(P)%W*B*S(II,JJ,KK)
        !$acc end atomic
        !$acc atomic update
        P_PARA(I-1+II,K-1+KK,J-1+JJ)=P_PARA(I-1+II,K-1+KK,J-1+JJ)+(MARKER(P)%V_PARA)**2*MARKER(P)%W*B*S(II,JJ,KK)
        !$acc end atomic
    ENDDO
    ENDDO
    ENDDO
    . . . . . .
ENDDO
!$acc end parallel
. . . . . .
END PROGRAM CALC_PRESSURE
```

通过使用范例A.1-A.5介绍的 OpenACC 指令，我们基本可以将 CLT 程序的核心计算任务全部移植到 GPU，CLT 程序在 GPU 上的加速效果如图3.4所示。而对于 CLT-K 程序，我们还需要考虑 PIC 模拟程序部分的并行。PIC 模拟中，主要计算任务和难点包括：i. 对标记粒子指标的逐个遍历 (推动粒子轨道和演化分布函数等)；ii. 不同计算区域之间粒子的 MPI 交互，PIC 模块与磁流体模块之间的电磁场、电流/压强数据的 MPI 交互；iii. 对所有标记粒子积分，计算电流和压强分布；iv. 每一步中的傅里叶滤波操作等。对于前两个问题，我们可以使用和 CLT 程序类似的方案实现高效的线程并行和多 GPU 设备通信。而对于后两个问题，我们需要采用新的 OpenACC 指令进行并行，并通过调用 CUDA 数学库[210] 来替代 MKL。

范例A.6给出了 CLT-K 程序中“atomic”原子操作指令的使用方式。PIC 模块中每一步推进标记粒子的轨道和分布函数之后，我们需要对标记粒子所携带的物理量在最近邻网格点上进行分配，即对于每一个网格点，要计算相邻所有标记粒子的贡献。而常规使用“parallel”或者“kernel”等指令对标记粒子指标直接并行会造成同一显存地址的访问冲突，即多个粒子对同一个网格的贡献被同时加到该网格变量中，造成数据竞争并产生错误的计算结果；若使用“routine seq”等串行指令来进行遍历操作，可以保证计算结果的正确但会严重降低计算效率。因此，在保证对标记粒子指标遍历高度并行的同时，需要确保

每一时刻每个网格点的显存地址只被一个进程进行更新，即需要使用“atomic”原子操作指令。如范例A.6所示，在计算网格点的压强时，将对多个粒子对压强累加求和的操作用指令“!$acc atomic update”进行保护，即可解决数据竞争的问题，并最低限度地影响程序并行效率。

CLT-K 程序中，为了处理单模模拟等问题，需要在每一步计算过程中对高能量粒子的扰动压强或扰动电流进行傅里叶滤波，从而在系统中只保留单支或者若干支模式。针对这一问题，在 CPU 平台，我们可以采用 MKL 中的 FFTW (Fastest Fourier Transform in the West) 数学库进行高效的模数分解，但在 GPU 上，我们需要将其替换为 CUDA 的 cuFFT (CUDA Fast Fourier Transform)[210]。CLT-K 程序的数据存储在 $\{R, \varphi, Z\}$ 三维网格中 (记网格数分别为 NR, NY, NZ)，傅里叶滤波一般针对 φ 方向进行操作。在传统滤波程序中，我们一般通过对极向 $\{R, Z\}$ 二维网格进行遍历，并对每一个 $\{R, Z\}$ 网格指标对应的 φ 方向一维数据进行 FFT 操作。但由于 GPU 单个流处理器性能较差，每次处理一个 $\{R, Z\}$ 网格点上 φ 方向数据效率太低，因此需要将 NR$*$NZ 组一维 NY 长度的组数合并成 NR$*$NZ$*$NY 大小的一维数组，并使用 cuFFT 中的批处理模式 (batch) 一次完成所有网格点 φ 方向的 FFT 计算任务，从而提高 GPU 上的傅里叶滤波效率。范例A.7给出了 CLT-K 程序 φ 方向滤波模块中 cuFFT 数学库的使用方式，主要分为如下几个步骤：i. 创建 FFT 操作计划 (PLAN)；ii. 将高维数据矢量化为一维数据，并保持需要滤波方向数据的连续性 (φ 方向)；iii. 执行正向 FFT 操作；iv. 在傅里叶谱空间滤掉指定环向模数分量；v. 执行逆向 FFT 操作；vi. 将一维数据重整为三维数据。

本附录简要介绍了 CLT(-K) 程序在 GPU 上的并行解决方案，CLT(-K) 程序在 GPU 设备上已初步实现较为理想的并行加速，同时保留了程序对 CPU 设备的完整兼容性。尽管仍有许多 OpenACC 和 CUDA 的高级功能以及其他类型数学库并未包含在上面的介绍中，但该工作仍可以作为其他数值模拟程序，特别是使用中心差分和显式推进的 CFD 或 MHD 程序异构并行加速的典型参考模板。

范例 A.7　CLT-K 程序 φ 方向 (对应程序中 Y 方向) 滤波模块中 cuFFT 数学库的使用方式。

```
PROGRAM FILTER
. . . . . .
INTEGER :: PLAND2Z, PLANZ2D, IERR, NCOUNT, I, J, K
COMPLEX*16, DEVICE, DIMENSION(NR*NZ*(NY/2+1)) :: SPECTRUM
REAL*8, DIMENSION(NR*NZ*NY) :: DATA1D
REAL*8, DIMENSION(NR,NZ,NY) :: DATA3D
!$acc enter data copyin(data1d, data3d)
! 1st create cufft plan
IERR = IERR + cufftPLAND2ZD(PLAND2Z,NY,CUFFT_D2Z,NR*NZ)
IERR = IERR + cufftPLAND2ZD(PLANZ2D,NY,CUFFT_Z2D,NR*NZ)
! 2nd reshape 3D data into 1D
!$acc parallel present(data1d, data3d) private(ncount)
!$acc loop independent collapse(3)
do I = 1, NR
do J = 1, NZ
do K = 1, NY
    NCOUNT = (I-1)*NZ*NY+(J-1)*NY+K
    DATA1D(NCOUNT) = DATA3D(I,J,K)
ENDDO
ENDDO
ENDDO
!$acc end parallel
! 3rd execute forward FFT
!$acc host_data use_device(data1d)
IERR = IERR + cufftExecD2Z(PLAND2Z,DATA1D,SPECTRUM)
!$acc end host_data
! 4th filt mode in spectrum
!$acc parallel present(spectrum) private(ncount)
!$acc loop independent collapse(3)
do I = 1, NR
do J = 1, NZ
do K = 1, NY/2+1
    NCOUNT = (I-1)*NZ*(NY/2+1)+(J-1)*(NY/2+1)+K
    SPECTRUM(NCOUNT)=SPECTRUM(I,J,K)/NY
    if(K.ne.MODE_FILT+1) SPECTRUM(NCOUNT)=0 ! keep n = mode_FILT
ENDDO
ENDDO
ENDDO
!$acc end parallel
! 5th execute backward FFT
!$acc host_data use_device(data1d)
IERR = IERR + cufftExecZ2D(PLANZ2D,SPECTRUM,DATA1D)
!$acc end host_data
! 6th 2nd reshape 1D data into 3D
!$acc parallel present(DATA1D, DATA3D) private(ncount)
!$acc loop independent collapse(3)
do I = 1, NR
do J = 1, NZ
do K = 1, NY
    NCOUNT = (I-1)*NZ*NY+(J-1)*NY+K
    DATA3D(I,J,K) = DATA1D(NCOUNT)
ENDDO
ENDDO
ENDDO
!$acc end parallel

!$acc exit data delete(data1d, data3d)
. . . . . .
END PROGRAM FILTER
```

附录 B　网格切分方法 (CUT-CELL) 中不同网格点的差分格式

根据第3.1.4节介绍的网格切分方法 (CUT-CELL) 边界处理方式，CLT 程序中的计算网格点可以根据图3.6分为六类，分别是：

i. 常规网格点 (regular points)；

ii. 第一类非常规网格点 (1st type irregular points)；

iii. 第二类非常规网格点 (2nd type irregular points)；

iv. 内部舍弃网格点 (inside dropped points)；

v. 外部舍弃网格点 (outside dropped points)；

vi. 边界点 (boundary points)，即网格线和边界线的交点。

本附录将简要介绍 CLT 程序对上述每一类网格点所采用的不同差分离散格式。

1. 常规网格点

对于远离边界点的常规网格点，我们采用均匀格点的五点中心差分进行离散。图B.1给出了五点中心差分的一维模板 (stencil)，为了计算在 i 点上的 k 阶导数 $f_i^{(k)}$，我们将 $f(x)$ 在 x_i 附近展开到第四阶 ($k \leq 4$)，网格宽度记为 h，得到如下关系式：

$$f_i = f_i, \tag{B.1}$$

$$f_{i+1} = f_i + f_i^{(1)} h + \frac{1}{2!} f_i^{(2)} h^2 + \frac{1}{3!} f_i^{(3)} h^3 + \frac{1}{4!} f_i^{(4)} h^4 + \mathcal{O}\left(h^5\right), \tag{B.2}$$

$$f_{i-1} = f_i + f_i^{(1)} (-h) + \frac{1}{2!} f_i^{(2)} (-h)^2 + \frac{1}{3!} f_i^{(3)} (-h)^3 + \frac{1}{4!} f_i^{(4)} (-h)^4 + \mathcal{O}\left(h^5\right), \tag{B.3}$$

$$f_{i+2} = f_i + f_i^{(1)} (2h) + \frac{1}{2!} f_i^{(2)} (2h)^2 + \frac{1}{3!} f_i^{(3)} (2h)^3 + \frac{1}{4!} f_i^{(4)} (2h)^4 + \mathcal{O}\left(h^5\right), \tag{B.4}$$

$$f_{i-2} = f_i + f_i^{(1)} (-2h) + \frac{1}{2!} f_i^{(2)} (-2h)^2 + \frac{1}{3!} f_i^{(3)} (-2h)^3 + \frac{1}{4!} f_i^{(4)} (-2h)^4 + \mathcal{O}\left(h^5\right). \tag{B.5}$$

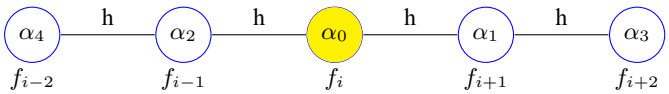

图 B.1　常规网格点 f_i：五点中心差分的一维模板 (stencil)，f_j 为第 j 个网格上的值，h 为网格间的均匀宽度，α_j 为第 j 个网格的差分系数。

对方程B.1-B.5分别乘以待求解的差分系数 $\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$：

$$\begin{aligned}\alpha_0 f_i + \alpha_1 f_{i+1} + \alpha_2 f_{i-1} + \alpha_3 f_{i+2} + \alpha_4 f_{i-2} = \ & (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\, f_i, \\ & + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4)\, h f_i^{(1)} \\ & + (\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4)\, \frac{1}{2!} h^2 f_i^{(2)} \\ & + (\alpha_1 - \alpha_2 + 8\alpha_3 - 8\alpha_4)\, \frac{1}{3!} h^3 f_i^{(3)} \\ & + (\alpha_1 + \alpha_2 + 16\alpha_3 + 16\alpha_4)\, \frac{1}{4!} h^4 f_i^{(4)} \\ & + \mathcal{O}\left(h^5\right). \end{aligned} \tag{B.6}$$

若要计算第 i 个网格点的第 k 阶导数的差分系数 $(k \le 4)$，只需令方程B.6右端除 $f_i^{(k)}$ 项外的系数均为 0，而 $f_i^{(k)}$ 项的系数为 1。从而将关于系数 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)^{\mathrm{T}}$ 的方程组写成 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}$ 的形式，其中：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 16 \end{pmatrix}, \tag{B.7}$$

而 $\mathbf{g}$ 中第 $k+1$ 个元素为 1，其余元素均为 0。从而求解 $\boldsymbol{\alpha}$ 即可得到 $f_i^{(k)}$ 的表达式为：

$$f_i^{(k)} = \frac{\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_{i+1} + \alpha_2 f_{i-1} + \alpha_3 f_{i+2} + \alpha_4 f_{i-2}}{h^k / k!} + \mathcal{O}\left(h^{5-k}\right). \tag{B.8}$$

例如，为了得到 $f_i^{(1)}$ 的表达式，令 $\mathbf{g}$ 除第二项外的值均为 0，第二项为 1，从而可以解出系数 $\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$ 分别为 $\{0,\ 2/3,\ -2/3,\ -1/12,\ 1/12\}$，第 i 网格点的一阶导数五点中心差分近似为：

$$f_i^{(1)} = \frac{2/3 f_{i+1} - 2/3 f_{i-1} - 1/12 f_{i+2} + 1/12 f_{i-2}}{h} + \mathcal{O}\left(h^4\right). \tag{B.9}$$

2. 第一类非常规网格点

第一类非常规网格点靠近边界的同时与边界点之间仍相隔一个有效计算网格点，对这类网格点我们可以采用五点中心偏差进行离散，该计算过程需要用到边界点和计算区域内最近邻三个有效网格点的值。对于边界点位于计算区域的右侧和左侧的情况，分别采用向后五点中心偏差和向前五点中心偏差。以图B.2 (a) 为例，边界点位于计算区域最右侧，因此我们只需将公式B.4中的 $2h$ 替换为 $(h+d)$，其中 d 为边界点到内部第一个有效计算网格点的距离，满足 $d > 0.5h$，并用公式B.6-B.8的方法重新计算差分系数。对于图B.2 (a) 的

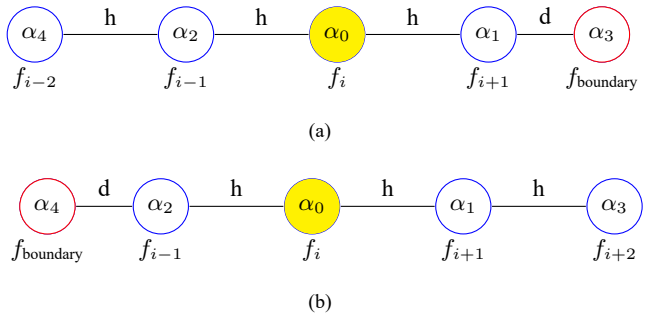

图 B.2　第一类非常规网格点 f_i：五点中心偏差的一维模板，f_j 为第 j 个网格上的值，f_{boundary} 为边界点上的值，h 为网格间的均匀宽度，d 为边界点到计算区域内最近邻有效网格点的距离 ($d > 0.5h$)，α_j 为第 j 个网格的差分系数。(a) 为边界点在计算区域右侧的情况，右侧中心偏差；(b) 为边界点在计算区域左侧的情况，左侧中心偏差。

向后中心偏差，求解差分系数 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)^{\mathrm{T}}$ 的方程组矩阵B.7为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{h+d}{h} & -2 \\ 0 & 1 & 1 & \left(\frac{h+d}{h}\right)^2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \left(\frac{h+d}{h}\right)^3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & \left(\frac{h+d}{h}\right)^4 & 16 \end{pmatrix}. \tag{B.10}$$

类似地，对于图B.2 (b) 的向前中心偏差，求解差分系数 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)^{\mathrm{T}}$ 的方程组矩阵B.7为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -\frac{h+d}{h} \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \left(\frac{h+d}{h}\right)^2 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & -\left(\frac{h+d}{h}\right)^3 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & \left(\frac{h+d}{h}\right)^4 \end{pmatrix}. \tag{B.11}$$

求解矩阵B.10或者B.11对应的方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}$ 即可得到差分系数 $\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$，图B.2 (a) 和 (b) 对应的第 i 网格点的 k 阶导数五点中心偏差分别近似为：

$$f_i^{(k)} = \frac{\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_{i+1} + \alpha_2 f_{i-1} + \alpha_3 f_{\text{boundary}} + \alpha_4 f_{i-2}}{h^k/k!} + \mathcal{O}\left(h^{5-k}\right), \tag{B.12}$$

和：

$$f_i^{(k)} = \frac{\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_{i+1} + \alpha_2 f_{i-1} + \alpha_3 f_{i+2} + \alpha_4 f_{\text{boundary}}}{h^k/k!} + \mathcal{O}\left(h^{5-k}\right). \tag{B.13}$$

3. 第二类非常规网格点

第二类非常规网格点为计算区域内最靠近计算边界的有效网格点 (该网格点到边界点的距离为 d，并满足 $d > 0.5h$)，对这类网格点我们采用五点偏差进行离散，需要用到边界点和计算区域内最近邻其他三个有效网格的值。对于边界点位于计算区域的右侧和左侧，

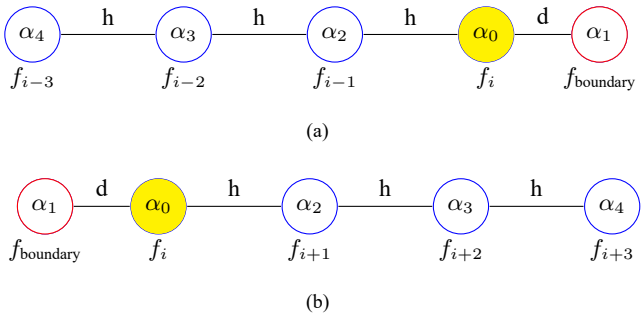

图 B.3　第二类非常规网格点 f_i：五点偏差的一维模板，f_j 为第 j 个网格上的值，f_{boundary} 为边界点上的值，h 为网格间的均匀宽度，d 为边界点到计算区域内最近邻有效网格点的距离 ($d > 0.5h$)，α_j 为第 j 个网格的差分系数。(a) 为边界点在计算区域右侧的情况，右侧偏差；(b) 为边界点在计算区域左侧的情况，左侧偏差。

分别采用向后五点偏差和向前五点偏差，如图B.3所示。对于图B.3 (a) 的向后偏差，求解差分系数 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^{\mathrm{T}}$ 的方程组矩阵B.7为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{d}{h} & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \left(\frac{d}{h}\right)^2 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & \left(\frac{d}{h}\right)^3 & -1 & -8 & -27 \\ 0 & \left(\frac{d}{h}\right)^4 & 1 & 16 & 81 \end{pmatrix}. \tag{B.14}$$

类似地，对于图B.3 (b) 的向前偏差，求解差分系数 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^{\mathrm{T}}$ 的方程组矩阵B.7为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{d}{h} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \left(\frac{d}{h}\right)^2 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & -\left(\frac{d}{h}\right)^3 & 1 & 8 & 27 \\ 0 & \left(\frac{d}{h}\right)^4 & 1 & 16 & 81 \end{pmatrix}. \tag{B.15}$$

求解矩阵B.14或者B.15对应的方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}$ 即可得到差分系数 $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$，图B.3 (a) 和 (b) 情况分别对应的第 i 网格点的 k 阶导数五点偏差近似为：

$$f_i^{(k)} = \frac{\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_{\text{boundary}} + \alpha_2 f_{i-1} + \alpha_3 f_{i-2} + \alpha_4 f_{i-3}}{h^k/k!} + \mathcal{O}\left(h^{5-k}\right), \tag{B.16}$$

和：

$$f_i^{(k)} = \frac{\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_{\text{boundary}} + \alpha_2 f_{i+1} + \alpha_3 f_{i+2} + \alpha_4 f_{i+3}}{h^k/k!} + \mathcal{O}\left(h^{5-k}\right). \tag{B.17}$$

4. 内部舍弃网格点

计算区域内还存在一类内部舍弃网格点，由于其距离计算边界太近 ($d < 0.5h$)，因此不需要通过差分进行离散，而只需要根据边界点和相邻有效网格点上的信息插值得到。如

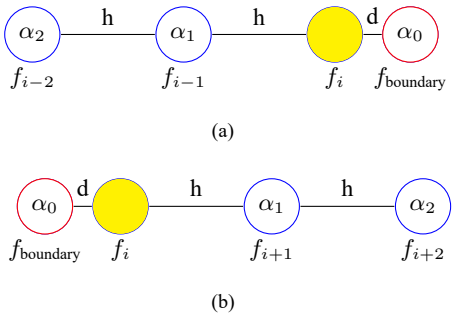

图 B.4　内部舍弃网格点 f_i：拉格朗日二次插值一维模板，f_j 为第 j 个网格上的值，f_{boundary} 为边界点上的值，h 为网格间的均匀宽度，d 为边界点到计算区域内部舍弃网格点的距离 ($d \leq 0.5h$)，α_j 为第 j 个网格的插值系数。(a) 为边界点在计算区域右侧的情况；(b) 为边界点在计算区域左侧的情况。

图B.4所示，(a) 和 (b) 分别表示边界点在计算区域右侧和左侧的情况。对于 f_i 的值，我们使用边界点和 i 网格点内侧两个有效网格点的值，采用朗格朗日二次插值得到。记任意网格点 j 的坐标为 x_j，边界网格点的坐标为 x_{boundary}，则：

$$
\begin{aligned}
f_i &= \alpha_0 f_{\text{boundary}} + \alpha_1 f_{i\mp1} + \alpha_2 f_{i\mp2}, \\
\alpha_0 &= \frac{(x_i - x_{i\mp1})(x_i - x_{i\mp2})}{(x_{\text{boundary}} - x_{i\mp1})(x_{\text{boundary}} - x_{i\mp2})}, \\
\alpha_1 &= \frac{(x_i - x_{\text{boundary}})(x_i - x_{i\mp2})}{(x_{i\mp1} - x_{\text{boundary}})(x_{i\mp1} - x_{i\mp2})}, \\
\alpha_2 &= \frac{(x_i - x_{\text{boundary}})(x_i - x_{i\mp1})}{(x_{i\mp2} - x_{\text{boundary}})(x_{i\mp2} - x_{i\mp1})}.
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

公式B.18中‘$\mp$’分别表示B.4 (a) 和 (b) 中边界点在计算区域右侧和左侧两种情况。尽管在给定方向上，内部舍弃点的值并不参与两侧有效网格点的差分计算，但由于该点在另一方向有可能是上述三类内部有效计算点，因此对内部舍弃网格点在该给定方向进行插值更新是有必要的。

5. 外部舍弃网格点

由于我们模拟中在极向平面采用均匀直角网格，因此会有很多点落在计算边界之外的情况，这一类点即为外部舍弃网格点，如图B.5所示。对这类网格点不需要进行任何计算操作，同时，这类网格点也不能参与到计算边界内部上述任意四类网格点之一的数值差分或者插值计算过程。

6. 边界点

当计算边界线与计算网格线相交时，会产生如图B.6中红色圆圈所示的边界点，对这类边界点的处理涉及到边界条件的选取。目前 CLT 程序的网格切分方法边界处理中均采用固定边界，因此只需要设置物理扰动量在边界为 0，即 $\delta f|_{@\text{boundary}} = 0$。而在下一步的程序开发中，我们需要将部分物理量 (等离子体密度扰动、压强扰动以及与边界平行的扰

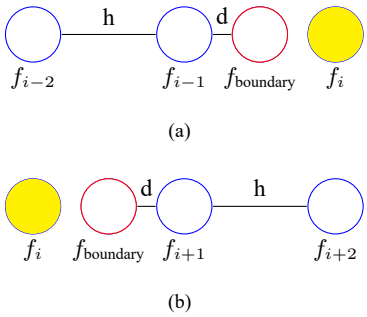

图 B.5　外部舍弃网格点 f_i：由于在计算边界外，对这类点不需要进行任何计算，同时这类点也不能参与计算边界以内任意网格点的计算过程。f_j 为第 j 个网格上的值，f_{boundary} 为边界点上的值，h 为网格间的均匀宽度，d 为边界点到计算区域内部舍弃网格点的距离。(a) 为边界点在计算区域右侧的情况；(b) 为边界点在计算区域左侧的情况。

动速度、扰动磁场和扰动电流等) 的边界条件改成自由边界，即 $\partial f/\partial r|_{@\text{boundary}} = 0$。为此，我们首先需要沿着计算边界的法向在计算区域内等距离找若干个辅助格点，如图B.6绿色圆圈所示。并利用第 j 个辅助格点周围的有效计算网格点二维插值出辅助格点上扰动物理量 f_j，随后利用两点或者三点外推的方式计算边界点的值 f_{boundary}。其中，两点外推的系数$\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$ 为 $\{4/3,\ -1/3\}$，即：

$$f_{\text{boundary}} = (4f_1 - f_2)/3 + \mathcal{O}\left(r^3\right). \tag{B.19}$$

而三点外推的系数 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ 分别为 $\{18/11,\ -9/11,\ 2/11\}$，即：

$$f_{\text{boundary}} = (18f_1 - 9f_2 + 2f_3)/11 + \mathcal{O}\left(r^4\right). \tag{B.20}$$

上述系数同样可以通过对 f_i 在目标网格点 (f_{boundary}) 附近泰勒展开得到，假设辅助网格点和边界点之间的均匀间距为 r，则有：

$$f_1 = f_{\text{boundary}} + f^{(1)}_{\text{boundary}} r + \frac{1}{2!} f^{(2)}_{\text{boundary}} r^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}_{\text{boundary}} r^3 + \mathcal{O}\left(r^4\right), \tag{B.21}$$

$$f_2 = f_{\text{boundary}} + f^{(1)}_{\text{boundary}} 2r + \frac{1}{2!} f^{(2)}_{\text{boundary}} (2r)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}_{\text{boundary}} (2r)^3 + \mathcal{O}\left(r^4\right), \tag{B.22}$$

$$f_3 = f_{\text{boundary}} + f^{(1)}_{\text{boundary}} 3r + \frac{1}{2!} f^{(2)}_{\text{boundary}} (3r)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}_{\text{boundary}} (3r)^3 + \mathcal{O}\left(r^4\right). \tag{B.23}$$

两点外推：对方程B.21和B.22分别乘以系数 $\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$ 并相加，保留到第二阶 (r^2)。去掉等于 0 的 $f^{(1)}_{\text{boundary}}$ 项，令二阶项 $f^{(2)}_{\text{boundary}}$ 的系数和为 0，f_{boundary} 前的系数和为 1，即可得到公式B.19对应的外推系数$\alpha_1,\ \alpha_2$，分别为 $\{4/3,\ -1/3\}$，其精度为 $\mathcal{O}(r^3)$。

三点外推：对方程B.21和B.23分别乘以系数 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ 并相加，保留到第三阶 (r^3)。去掉等于 0 的 $f^{(1)}_{\text{boundary}}$ 项，令二阶项 $f^{(2)}_{\text{boundary}}$ 和三阶项 $f^{(3)}_{\text{boundary}}$ 的系数和均为 0，f_{boundary} 前的系数和为 1，即可得到公式B.20对应的外推系数$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$，分别为 $\{18/11,\ -9/11,\ 2/11\}$，其精度为 $\mathcal{O}(r^4)$。

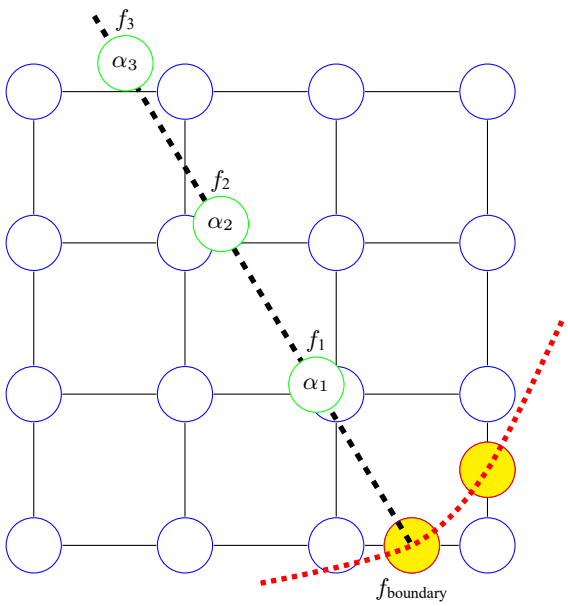

图 B.6　边界点 f_{boundary}：红色点线为计算边界线，黑色虚线表示边界点附近边界曲线的法向，蓝色圆圈为网格点，红色圆圈为边界线与网格线相交的边界点，绿色圆圈为黑色法向虚线在计算区域内的均匀分布辅助格点 (f_j 与 f_{boundary} 对应的任意相邻两个点之间距离均相等，记为 r)。f_j 为第 j 个辅助格点上的值，可以通过周围最近邻点插值得到，f_{boundary} 为边界点上的值，α_j 为第 j 个辅助格点的外推系数。如果为固定边界，则直接设置物理扰动量在边界为 0，即 $\delta f|_{@\text{boundary}} = 0$；如果为自由边界条件 $\partial f/\partial r|_{@\text{boundary}} = 0$，则 f_{boundary} 的值需要用辅助网格点的值 f_j 沿边界线的法向 (黑色虚线) 外推得到。

上述自由边界处理时，在考虑 MPI 区域分解并行时，边界点 f_{boundary}、内部辅助点 f_j 和内部有效计算网格点可能处于不同 MPI 进程的计算区域。因此，需要设计合适的数据交互方式来传输不同 MPI 进程中每个边界点外推处理时所用到的内部网格上的物理量。另外，目前 CLT 程序的网格切分边界处理方法暂时只能解决凸边界问题，即网格线与边界线最多仅有两个交点。对于凹边界，网格线与边界线可能存在多个交点，对不同类型点的确定以及差分格式的应用会更加复杂。

附录 C　CLT 程序的实验位型拓展和共振磁扰动模数分析

为使用 CLT 程序模拟接近真实实验放电位型下的等离子体演化过程，我们需要读入实验反演得到的初始平衡文件，其中最通用的即为 EFIT 程序的 Gfile 平衡文件[186]。Gfile 平衡文件主要给出 $R-Z$ 平面直角网格上的二维极向磁通信息 $\psi_p(R,\,Z)$，以及关于极向磁通分布的一维变量信息，包括安全因子 $q(\psi_p)$、等离子体压强 $p(\psi_p)$、压强梯度 $p'(\psi_p)$、$F(\psi_p)=RB_\varphi$ 和 $FF'(\psi_p)$ 等，‘′’ 表示 $d/d\psi_p$。通过这些数据，我们可以计算出 $R-Z$ 平面每一个网格点的等离子体压强、电流和磁场信息。为得到 p 和 F 等一维物理量的二维分布，只需要根据 $\psi_p(R,\,Z)$ 的分布将一维的 $p(\psi_p)$ 等信息映射到二维极向网格上。另外，磁场可以写成：

$$\mathbf{B}=\nabla\psi_p\times\nabla\varphi+F\nabla\varphi, \tag{C.1}$$

即：

$$B_R=-\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_p}{\partial Z}, \tag{C.2}$$

$$B_\varphi=F/R, \tag{C.3}$$

$$B_Z=\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_p}{\partial R}. \tag{C.4}$$

电流表达式为：

$$J_R=-\frac{F'}{\mu_0 R}\frac{\partial\psi_p}{\partial Z}, \tag{C.5}$$

$$J_\varphi=RP'+\frac{FF'}{\mu_0 R}, \tag{C.6}$$

$$J_Z=\frac{F'}{\mu_0 R}\frac{\partial\psi_p}{\partial R}. \tag{C.7}$$

实验中还经常给出关于环向磁通 ψ_t 的剖面信息 $f(\psi_t)$，例如电子和离子的密度、温度，以及等离子体环向转动频率等，而 Gfile 等平衡文件通常使用极向磁通 ψ_p。因此，我们可以根据 $q(\psi_p)=d\psi_t/d\psi_p$，积分得到 ψ_t 与 ψ_p 的依赖关系，从而将关于环向磁通 ψ_t 的剖面信息转化为模拟所使用的关于 ψ_p 的分布形式。例如，EAST 托卡马克第 52340 次放电 3150ms 时刻[177,211] 的 Gfile 平衡经上述处理后如图C.1所示，其中计算边界主要由限制器 (limiter) 上的部分点连线而成。此外，为避免在共振磁扰动线圈位置产生奇点，我们调整计算边界范围使得共振磁扰动线圈位于计算边界以外。

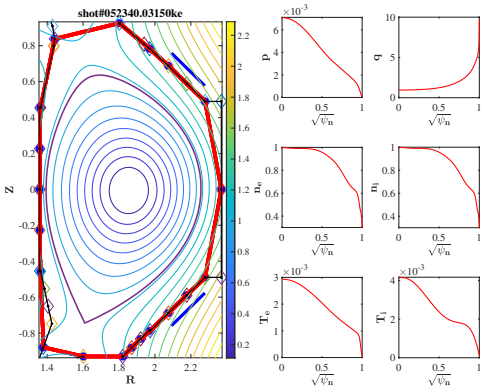

图 C.1　EAST 托卡马克第 52340 次放电 3150ms 时刻[177,211] 平衡位型分布。左侧主图为磁面的极向二维分布，红色实线为 CLT 选取的计算边界，蓝色线段为共振磁扰动线圈在极向的投影，紫色实线为最外层闭合磁面，等高线为归一化极向磁通 ψ_n。右侧子图分别为归一化后等离子体压强 p、安全因子 q、电子密度 n_e、离子密度 n_i、电子温度 T_e 和离子温度 T_i 的径向 ($r=\sqrt{\psi_n}$) 分布。

为了准确分析共振磁扰动和其他等离子体不稳定性的模数信息，需使用沿磁力线拉直坐标系 $\{\psi_p,\ \theta,\ \varphi\}$ 的磁面网格。在 CLT 程序中，我们将环向角 φ 固定为几何环向角，并通过磁力线追踪得到每层磁面上的广义极向角分布 $\theta(R,\ Z)$[212]，即：

$$\frac{dR}{d\varphi}=\frac{B_R}{B_\varphi}, \tag{C.8}$$

$$\frac{dZ}{d\varphi}=\frac{B_Z}{B_\varphi}, \tag{C.9}$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi}=\frac{1}{q}. \tag{C.10}$$

针对图C.1的平衡数据，利用上述方法得到如图C.2所示的广义极向角 $\theta(R,\ Z)$ 二维分布和 $\{\psi_p,\ \theta,\ \varphi\}$ 磁面坐标系下的均匀网格。在该广义极向角 $\theta(R,\ Z)$ 和 $\{\psi_p,\ \theta,\ \varphi\}$ 磁面坐标网格下对共振磁扰动和其他等离子体不稳定性分析得到的极向和环向模数信息是准确的。

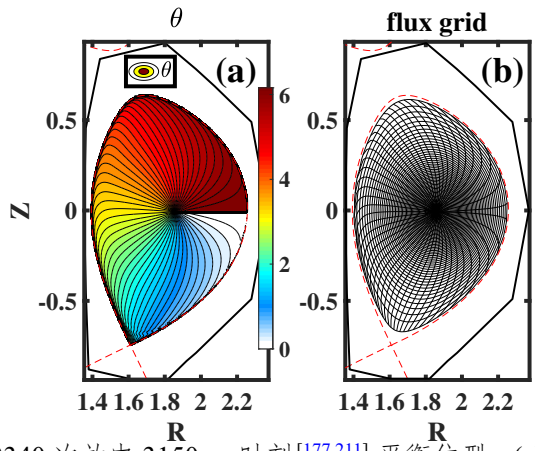

图 C.2　EAST 托卡马克第 52340 次放电 3150ms 时刻[177,211] 平衡位型：(a) 广义极向角 $\theta(R,\ Z)$ 二维分布；(b) $\{\psi_p,\ \theta,\ \varphi\}$ 磁面坐标系下的均匀网格。

参考文献

[1] Cowley S C. The quest for fusion power [J]. Nature physics, 2016, 12(5): 384 – 386.

[2] Bosch H S, Hale G M. Improved formulas for fusion cross-sections and thermal reactivities [J]. Nuclear Fusion, 1992, 32(4): 611 – 631.

[3] Huba J. NRL plasma formulary [M]. Washington, DC: Naval Research Laboratory, 2016.

[4] Betti R, Hurricane O. Inertial-confinement fusion with lasers [J]. Nature Physics, 2016, 12(5): 435 – 448.

[5] Zylstra A B, Hurricane O A, Callahan D A, et al. Burning plasma achieved in inertial fusion [J]. Nature, 2022, 601(7894): 542 – 548.

[6] Yuqiu G, Feng Z, Lianqiang S, et al. Initial indirect cone-in-shell fast ignition integrated experiment on Shengguang II-updated facility [J]. High Power Laser and Particle Beams, 2015, 27(11): 110101.

[7] Ongena J, Koch R, Wolf R, et al. Magnetic-confinement fusion [J]. Nature Physics, 2016, 12(5): 398 – 410.

[8] Post R. The magnetic mirror approach to fusion [J]. Nuclear Fusion, 1987, 27(10): 1579 – 1739.

[9] Dudziak D J, Krakowski R A. Radioactivity Induced in A Theta-Pinch Fusion Reactor [J]. Nuclear Technology, 1975, 25(1): 32 – 55.

[10] Shumlak U. Z-pinch fusion [J]. Journal of Applied Physics, 2020, 127(20): 200901.

[11] Binderbauer M W, Tajima T, Steinhauer L C, et al. A high performance field-reversed configuration [J]. Physics of Plasmas, 2015, 22(5): 056110.

[12] Bodin H, Newton A. Reversed-field-pinch research [J]. Nuclear Fusion, 1980, 20(10): 1255 – 1324.

[13] Jarboe T R. Review of spheromak research [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1994, 36(6): 945 – 990.

[14] Artsimovich L. Tokamak devices [J]. Nuclear Fusion, 1972, 12(2): 215 – 252.

[15] Boozer A H. What is a stellarator? [J]. Physics of Plasmas, 1998, 5(5): 1647 – 1655.

[16] Pedersen T S, Otte M, Lazerson S, et al. Confirmation of the topology of the Wendelstein 7-X magnetic field to better than 1: 100,000 [J]. Nature communications, 2016, 7(1): 1 – 10.

[17] Horvath A, Rachlew E. Nuclear power in the 21st century: Challenges and possibilities [J]. Ambio, 2016, 45(1): 38 – 49.

[18] Ikeda K. ITER on the road to fusion energy [J]. Nuclear Fusion, 2009, 50(1): 014002.

[19] Lawson J D. Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor [J]. Proceedings of the Physical Society. Section B, 1957, 70(1): 6 – 10.

[20] Team J. Fusion energy production from a deuterium-tritium plasma in the JET tokamak [J]. Nuclear Fusion, 1992, 32(2): 187 – 203.

[21] Keilhacker M, Gibson A, Gormezano C, et al. High fusion performance from deuterium-tritium plasmas in JET [J]. Nuclear Fusion, 1999, 39(2): 209 – 234.

[22] Gibney E. Nuclear-fusion reactor smashes energy record [J]. Nature, 2022, 602(371): 371.

[23] Strachan J D, Batha S, Beer M, et al. TFTR DT experiments [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1997, 39(12B): B103 – B114.

[24] Fujita T, Kamada Y, Ishida S, et al. High performance experiments in JT-60U reversed shear discharges [J]. Nuclear Fusion, 1999, 39(11Y): 1627 – 1636.

[25] ITER Homepage. https://www.iter.org [H].

[26] Wesson J, Campbell D J. Tokamaks [M]. New York: Oxford university press, 2004.

[27] Troyon F, Gruber R, Saurenmann H, et al. MHD-Limits to Plasma Confinement [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1984, 26(1A): 209 – 215.

[28] Février O. Global modelling of magnetic island control in tokamaks [D]. Cadarache: Université d'Aix-Marseille, 2016.

[29] 王龙. 磁约束等离子体实验物理 [M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[30] Sun Y, Jia M, Zang Q, et al. Edge localized mode control using n = 1 resonant magnetic perturbation in the EAST tokamak [J]. Nuclear Fusion, 2016, 57(3): 036007.

[31] Song X, Li J, Leuer J, et al. First plasma scenario development for HL-2M [J]. Fusion Engineering and Design, 2019, 147(2019): 111254.

[32] Sun T, Ji X, Liu Y, et al. Design, installation and operation of in-vessel resonant magnetic perturbation system on the HL-2A tokamak [J]. Fusion Engineering and Design, 2019, 148(2019): 111301.

[33] Liu L, He J, Hu Q, et al. Observation of beta-induced Alfvén Eigenmode in J-TEXT tokamak [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2015, 57(6): 065007.

[34] He Y X. A Research Program of Spherical Tokamak in China [J]. Plasma Science and Technology, 2002, 4(4): 1355 – 1360.

[35] Lee G, Kwon M, Doh C, et al. Design and construction of the KSTAR tokamak [J]. Nuclear Fusion, 2001, 41(10): 1515 – 1523.

[36] and N O. Overview of JT-60U results towards the establishment of advanced tokamak operation [J]. Nuclear Fusion, 2009, 49(10): 104007.

[37] Heidbrink W W. Beam-driven chirping instability in DIII-D [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1995, 37(9): 937–949.

[38] Vershkov V, Andreev V, Borschegovskiy A, et al. Recent results of the T-10 tokamak [J]. Nuclear Fusion, 2011, 51(9): 094019.

[39] Houtte D V, Supra E T. One minute pulse operation in the TORE SUPRA tokamak [J]. Nuclear Fusion, 1993, 33(1): 137–141.

[40] Ryter F, Buchl K, Fuchs C, et al. H-mode results in ASDEX Upgrade [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1994, 36(7A): A99–A104.

[41] Buratti P, Smeulders P, Zonca F, et al. Observation of high-frequency waves during strong tearing mode activity in FTU plasmas without fast ions [J]. Nuclear Fusion, 2005, 45(11): 1446–1450.

[42] Messiaen A M, Ongena J, Samm U, et al. High Confinement and High Density with Stationary Plasma Energy and Strong Edge Radiation in the TEXTOR-94 Tokamak [J]. Physical Review Letters, 1996, 77(12): 2487–2490.

[43] Coda S, Ahn J, Albanese R, et al. Overview of the TCV tokamak program: scientific progress and facility upgrades [J]. Nuclear Fusion, 2017, 57(10): 102011.

[44] Hole M J, Appel L C. A modulation model for mode splitting of magnetic perturbations in the Mega Ampere Spherical Tokamak [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2009, 51(4): 045002.

[45] Greenwald M, Bader A, Baek S, et al. 20 years of research on the Alcator C-Mod tokamak [J]. Physics of Plasmas, 2014, 21(11): 110501.

[46] Langmuir I. Oscillations in ionized gases [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1928, 14(8): 627.

[47] Yan X, Ouyang J, Zhang C, et al. Plasma medicine for neuroscience—An introduction [J]. Chinese Neurosurgical Journal, 2019, 5(1): 1–8.

[48] Ma Z W, Chen T, Zhang H W, et al. Effective resistivity in collisionless magnetic reconnection [J]. Scientific Reports, 2018, 8(1): 1–6.

[49] Fisch N J, Rax J-M. Interaction of energetic alpha particles with intense lower hybrid waves [J]. Physical Review Letters, 1992, 69(4): 612–615.

[50] Wong K L, Budny R, Nazikian R, et al. Alpha-Channeling Simulation Experiment in the DIII-D Tokamak [J]. Physical Review Letters, 2004, 93(8): 085002.

[51] Duesing G, Altmann H, Falter H, et al. Neutral Beam Injection System [J]. Fusion Technol-

ogy, 1987, 11(1) : 163 – 202.

[52] Litvak A, Permitin G, Suvorov E, et al. Electron-cyclotron heating of plasma in toroidal systems [J]. Nuclear Fusion, 1977, 17(4) : 659 – 665.

[53] Start D, Jacquinot J, Bergeaud V, et al. Bulk ion heating with ICRH in JET DT plasmas [J]. Nuclear Fusion, 1999, 39(3) : 321 – 336.

[54] Goldston R J, Rutherford P H. Introduction to plasma physics [M]. Bristol : Institute of Physics Publishing, 1995.

[55] Kolesnichenko Y. The role of alpha particles in tokamak reactors [J]. Nuclear Fusion, 1980, 20(6) : 727 – 780.

[56] Zweben S J, Arunasalam V, Batha S H, et al. Alpha-particle physics in the tokamak fusion test reactor DT experiment [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1997, 39(5A) : A275 – A283.

[57] Todo Y. Introduction to the interaction between energetic particles and Alfven eigenmodes in toroidal plasmas [J]. Reviews of Modern Plasma Physics, 2019, 3(1) : 1 – 33.

[58] Heidbrink W W. Basic physics of Alfvén instabilities driven by energetic particles in toroidally confined plasmas [J]. Physics of Plasmas, 2008, 15(5) : 055501.

[59] Chen L. Theory of magnetohydrodynamic instabilities excited by energetic particles in tokamaks* [J]. Physics of Plasmas, 1994, 1(5) : 1519 – 1522.

[60] Hegna C C, Callen J D. Stability of tearing modes in tokamak plasmas [J]. Physics of Plasmas, 1994, 1(7) : 2308 – 2318.

[61] Bussac M N, Pellat R, Edery D, et al. Internal Kink Modes in Toroidal Plasmas with Circular Cross Sections [J]. Physical Review Letters, 1975, 35(24) : 1638 – 1641.

[62] Wang S, Ma Z W. Influence of toroidal rotation on resistive tearing modes in tokamaks [J]. Physics of Plasmas, 2015, 22(12) : 122504.

[63] Zhu J, Ma Z W, Wang S. Hybrid simulations of Alfvén modes driven by energetic particles [J]. Physics of Plasmas, 2016, 23(12) : 122506.

[64] Porcelli F, Stankiewicz R, Kerner W, et al. Solution of the drift-kinetic equation for global plasma modes and finite particle orbit widths [J]. Physics of Plasmas, 1994, 1(3) : 470 – 480.

[65] Marchenko V A, Denton R E, Hudson M K. A magnetohydrodynamic model of kinetic Alfvén waves with finite ion gyroradius [J]. Physics of Plasmas, 1996, 3(10) : 3861 – 3863.

[66] Alfvén H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves [J]. Nature, 1942, 150(3805) : 405 – 406.

[67] Freidberg J P. Ideal MHD [M]. New York : Cambridge University Press, 2014.

[68] Vlad G, Zonca F, Briguglio S. Dynamics of Alfvén waves in tokamaks [J]. La Rivista del

Nuovo Cimento (1978-1999), 1999, 22(7) : 1.

[69] 仇志勇. 托卡马克等离子体中测地声模的理论研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2010.

[70] 王涛. 聚变等离子体中剪切阿尔芬波和高能量例子动理学的混合模拟研究 [D]. 杭州 : 浙江大学, 2019.

[71] Fu G Y, Van dam J W. Excitation of the toroidicity-induced shear Alfvén eigenmode by fusion alpha particles in an ignited tokamak [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1989, 1(10) : 1949 – 1952.

[72] Fu G Y, Cheng C Z. Theory of a high-n toroidicity-induced shear Alfvén eigenmode in tokamaks [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1990, 2(5) : 985 – 993.

[73] 谢华生. 计算等离子体物理导论 [M]. 北京 : 科学出版社, 2018.

[74] Kramer G J, Sharapov S E, Nazikian R, et al. Observation of Odd Toroidal Alfvén Eigenmodes [J]. Physical Review Letters, 2004, 92(1) : 015001.

[75] Betti R, Freidberg J P. Stability of Alfvén gap modes in burning plasmas [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992, 4(6) : 1465 – 1474.

[76] Fasoli A, Lister J, Sharapov S, et al. Overview of Alfven eigenmode experiments in JET [J]. Nuclear Fusion, 1995, 35(12) : 1485 – 1495.

[77] Kramer G J, Saigusa M, Ozeki T, et al. Noncircular Triangularity and Ellipticity-Induced Alfvén Eigenmodes Observed in JT-60U [J]. Physical Review Letters, 1998, 80(12) : 2594 – 2597.

[78] Biancalani A, Chen L, Pegoraro F, et al. Continuous Spectrum of Shear Alfvén Waves within Magnetic Islands [J]. Physical Review Letters, 2010, 105(9) : 095002.

[79] Nakajima N, Cheng C Z, Okamoto M. High-n helicity-induced shear Alfvén eigenmodes [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992, 4(5) : 1115 – 1121.

[80] Toi K, Ohdachi S, Yamamoto S, et al. MHD instabilities and their effects on plasma confinement in Large Helical Device plasmas [J]. Nuclear Fusion, 2004, 44(2) : 217 – 225.

[81] Wei S, Wang T, Chen N, et al. Nonlinear reversed shear Alfvén eigenmode saturation due to spontaneous zonal current generation [J]. Journal of Plasma Physics, 2021, 87(5) : 905870505.

[82] Chu M S, Greene J M, Lao L L, et al. A numerical study of the high-n shear Alfvén spectrum gap and the high-n gap mode [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992, 4(11) : 3713 – 3721.

[83] Turnbull A D, Strait E J, Heidbrink W W, et al. Global Alfvén modes: Theory and experiment* [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1993, 5(7) : 2546 – 2553.

[84] Heidbrink W W, Strait E J, Chu M S, et al. Observation of beta-induced Alfvén eigenmodes in the DIII-D tokamak [J]. Physical Review Letters, 1993, 71(6): 855 – 858.

[85] Appert K, Gruber R, Troyuon F, et al. Excitation of global eigenmodes of the Alfven wave in Tokamaks [J]. Plasma Physics, 1982, 24(9): 1147 – 1159.

[86] Chambrier A D, Cheetham A D, Heym A, et al. Alfven wave coupling experiments of the TCA Tokamak [J]. Plasma Physics, 1982, 24(8): 893 – 902.

[87] Sharapov S E, Alper B, Berk H L, et al. Alfvén wave cascades in a tokamak [J]. Physics of Plasmas, 2002, 9(5): 2027 – 2036.

[88] Kimura H, Kusama Y, Saigusa M, et al. Alfvén eigenmode and energetic particle research in JT-60U [J]. Nuclear Fusion, 1998, 38(9): 1303 – 1314.

[89] Cheng C, Chen L, Chance M. High-n ideal and resistive shear Alfvén waves in tokamaks [J]. Annals of Physics, 1985, 161(1): 21 – 47.

[90] Cheng C Z, Chance M S. Low-n shear Alfvén spectra in axisymmetric toroidal plasmas [J]. The Physics of Fluids, 1986, 29(11): 3695 – 3701.

[91] Wong K L, Fonck R J, Paul S F, et al. Excitation of toroidal Alfvén eigenmodes in TFTR [J]. Physical Review Letters, 1991, 66(14): 1874 – 1877.

[92] Heidbrink W, Strait E, Doyle E, et al. An investigation of beam driven Alfvén instabilities in the DIII-D tokamak [J]. Nuclear Fusion, 1991, 31(9): 1635 – 1648.

[93] Kolesnichenko Y I, Lutsenko V V, Wobig H, et al. Alfvén continuum and high-frequency eigenmodes in optimized stellarators [J]. Physics of Plasmas, 2001, 8(2): 491 – 509.

[94] Cook C R, Hegna C C, Anderson J K, et al. Identification of island-induced Alfvén eigenmodes in a reversed field pinch [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2016, 58(5): 054004.

[95] Chen L, White R B, Rosenbluth M N. Excitation of Internal Kink Modes by Trapped Energetic Beam Ions [J]. Physical Review Letters, 1984, 52(13): 1122 – 1125.

[96] Mcguire K, Goldston R, Bell M, et al. Study of High-Beta Magnetohydrodynamic Modes and Fast-Ion Losses in PDX [J]. Physical Review Letters, 1983, 50(12): 891 – 895.

[97] Todo Y. Properties of energetic-particle continuum modes destabilized by energetic ions with beam-like velocity distributions [J]. Physics of Plasmas, 2006, 13(8): 082503.

[98] Santoro R A, Chen L. Gyrokinetic-magnetohydrodynamic hybrid simulation of the transition from toroidal Alfvén eigenmodes to kinetic ballooning modes in tokamaks [J]. Physics of Plasmas, 1996, 3(6): 2349 – 2352.

[99] Shinohara K, Kusama Y, Takechi M, et al. Alfvén eigenmodes driven by Alfvénic beam ions in JT-60U [J]. Nuclear Fusion, 2001, 41(5): 603 – 612.

[100] Briguglio S, Fogaccia G, Vlad G, et al. Particle simulation of bursting Alfvén modes in JT-60U [J]. Physics of Plasmas, 2007, 14(5): 055904.

[101] Fitzpatrick R. https://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/lectures [H].

[102] Fu G Y. Energetic-Particle-Induced Geodesic Acoustic Mode [J]. Physical Review Letters, 2008, 101(18): 185002.

[103] Zonca F, Chen L. Resonant damping of toroidicity-induced shear-Alfvén eigenmodes in tokamaks [J]. Physical Review Letters, 1992, 68(5): 592 – 595.

[104] Mett R R, Mahajan S M. Kinetic theory of toroidicity-induced Alfvén eigenmodes [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992, 4(9): 2885 – 2893.

[105] Gorelenkov N N, Sharapov S E. On the collisional damping of TAE-modes on trapped electrons in tokamaks [J]. Physica Scripta, 1992, 45(2): 163 – 166.

[106] Cheng C. Kinetic extensions of magnetohydrodynamics for axisymmetric toroidal plasmas [J]. Physics Reports, 1992, 211(1): 1 – 51.

[107] Fu G Y, Park W. Nonlinear Hybrid Simulation of the Toroidicity-Induced Alfvén Eigenmode [J]. Physical Review Letters, 1995, 74(9): 1594 – 1596.

[108] Chen L, Zonca F. Nonlinear Excitations of Zonal Structures by Toroidal Alfvén Eigenmodes [J]. Physical Review Letters, 2012, 109(14): 145002.

[109] Zhu J, Ma Z, Wang S, et al. Nonlinear dynamics of toroidal Alfvén eigenmodes in the presence of tearing modes [J]. Nuclear Fusion, 2018, 58(4): 046019.

[110] O'neil T. Collisionless Damping of Nonlinear Plasma Oscillations [J]. The Physics of Fluids, 1965, 8(12): 2255 – 2262.

[111] Berk H L, Breizman B N. Saturation of a single mode driven by an energetic injected beam. I. Plasma wave problem [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1990, 2(9): 2226 – 2234.

[112] Berk H L, Breizman B N. Saturation of a single mode driven by an energetic injected beam. II. Electrostatic ''universal'' destabilization mechanism [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1990, 2(9): 2235 – 2245.

[113] Berk H L, Breizman B N. Saturation of a single mode driven by an energetic injected beam. III. Alfvén wave problem [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1990, 2(9): 2246 – 2252.

[114] Lang J, Fu G-Y, Chen Y. Nonlinear simulation of toroidal Alfvén eigenmode with source and sink [J]. Physics of Plasmas, 2010, 17(4): 042309.

[115] Berk H L, Breizman B N, Pekker M. Numerical simulation of bump-on-tail instability with source and sink [J]. Physics of Plasmas, 1995, 2(8): 3007 – 3016.

[116] Berk H L, Breizman B N, Pekker M. Nonlinear Dynamics of a Driven Mode near Marginal Stability [J]. Physical Review Letters, 1996, 76(8): 1256 – 1259.

[117] Berk H L, Breizman B N, Candy J, et al. Spontaneous hole−clump pair creation [J]. Physics of Plasmas, 1999, 6(8) : 3102 – 3113.

[118] Shinohara K, Takechi M, Ishikawa M, et al. Recent progress of Alfvén eigenmode experiments using N-NB in JT-60U tokamak [J]. Nuclear Fusion, 2002, 42(8) : 942 – 948.

[119] Fredrickson E D, Bell R E, Darrow D S, et al. Collective fast ion instability-induced losses in National Spherical Tokamak Experiment [J]. Physics of Plasmas, 2006, 13(5) : 056109.

[120] Gryaznevich M, Sharapov S. Perturbative and non-perturbative modes in START and MAST [J]. Nuclear Fusion, 2006, 46(10) : S942 – S950.

[121] Todo Y, Berk H L, Breizman B N. Simulation of intermittent beam ion loss in a Tokamak Fusion Test Reactor experiment [J]. Physics of Plasmas, 2003, 10(7) : 2888 – 2902.

[122] Durst R D, Fonck R J, Wong K L, et al. Measurements of the radial structure and poloidal spectra of toroidal Alfvén eigenmodes in the Tokamak Fusion Test Reactor [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992, 4(11) : 3707 – 3712.

[123] Todo Y, Berk H, Breizman B. Nonlinear magnetohydrodynamic effects on Alfvén eigenmode evolution and zonal flow generation [J]. Nuclear Fusion, 2010, 50(8) : 084016.

[124] Todo Y, Berk H, Breizman B. Saturation of a toroidal Alfvén eigenmode due to enhanced damping of nonlinear sidebands [J]. Nuclear Fusion, 2012, 52(9) : 094018.

[125] Wang Z. Zonal Field Generation by Toroidal Alfven Eigenmode [C] // APS Meeting Abstracts, Vol 2014 : APS Division of Plasma Physics Meeting Abstracts. 2014 : NI1.006.

[126] Qiu Z, Chen L, Zonca F. Effects of energetic particles on zonal flow generation by toroidal Alfvén eigenmode [J]. Physics of Plasmas, 2016, 23(9) : 090702.

[127] Hahm T S, Chen L. Nonlinear Saturation of Toroidal Alfvén Eigenmodes via Ion Compton Scattering [J]. Physical Review Letters, 1995, 74(2) : 266 – 269.

[128] Qiu Z, Chen L, Zonca F, et al. Nonlinear Decay and Plasma Heating by a Toroidal Alfvén Eigenmode [J]. Physical Review Letters, 2018, 120(13) : 135001.

[129] Chen L, Lin Z, White R. Excitation of zonal flow by drift waves in toroidal plasmas [J]. Physics of Plasmas, 2000, 7(8) : 3129 – 3132.

[130] Zhang H, Lin Z. Nonlinear Generation of Zonal Fields by the Beta-Induced Alfvén Eigenmode in Tokamak [J]. Plasma Science and Technology, 2013, 15(10) : 969 – 973.

[131] Qiu Z, Chen L, Zonca F. Fine structure zonal flow excitation by beta-induced Alfvén eigenmode [J]. Nuclear Fusion, 2016, 56(10) : 106013.

[132] Qiu Z, Chen L, Zonca F, et al. Zero frequency zonal flow excitation by energetic electron driven beta-induced Alfvén eigenmode [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2020, 62(10) : 105012.

[133] Wang Y, Wang T, Wei S, et al. Nonlinear excitation of a geodesic acoustic mode by reversed shear Alfvén eignemodes [J]. Plasma Science and Technology, 2022, 24(2): 025105.

[134] Zhu X, Chen W, Podestà M, et al. Avalanche transport of energetic-ions in magnetic confinement plasmas: nonlinear multiple wave-number simulation [J]. Nuclear Fusion, 2021, 62(1): 016012.

[135] Duong H, Heidbrink W, Strait E, et al. Loss of energetic beam ions during TAE instabilities [J]. Nuclear Fusion, 1993, 33(5): 749 – 765.

[136] Wong K-L. A review of Alfvén eigenmode observations in toroidal plasmas [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1999, 41(1): R1 – R56.

[137] Fasoli A, Borba D, Bosia G, et al. Direct Measurement of the Damping of Toroidicity-Induced Alfvén Eigenmodes [J]. Physical Review Letters, 1995, 75(4): 645 – 648.

[138] Nazikian R, Fu G Y, Batha S H, et al. Alpha-Particle-Driven Toroidal Alfvén Eigenmodes in the Tokamak Fusion Test Reactor [J]. Physical Review Letters, 1997, 78(15): 2976 – 2979.

[139] Fu G Y, Cheng C Z, Budny R, et al. Stability Analysis of Toroidicity-Induced Alfvén Eigenmodes in TFTR Deuterium-Tritium Experiments [J]. Physical Review Letters, 1995, 75(12): 2336 – 2339.

[140] Sharapov S, Testa D, Alper B, et al. MHD spectroscopy through detecting toroidal Alfvén eigenmodes and Alfvén wave cascades [J]. Physics Letters A, 2001, 289(3): 127 – 134.

[141] Berk H L, Borba D N, Breizman B N, et al. Theoretical Interpretation of Alfvén Cascades in Tokamaks with Nonmonotonic q Profiles [J]. Physical Review Letters, 2001, 87(18): 185002.

[142] Weller A, Spong D A, Jaenicke R, et al. Neutral beam driven global Alfvén eigenmodes in the Wendelstein W7-AS stellarator [J]. Physical Review Letters, 1994, 72(8): 1220 – 1223.

[143] Podestà M, Bell R, Bortolon A, et al. Study of chirping toroidicity-induced Alfvén eigenmodes in the National Spherical Torus Experiment [J]. Nuclear Fusion, 2012, 52(9): 094001.

[144] Kim Y C, Powers E J. Digital Bispectral Analysis and Its Applications to Nonlinear Wave Interactions [J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 1979, 7(2): 120 – 131.

[145] Shi P W, Chen W, Shi Z B, et al. Destabilization of toroidal Alfvén eigenmode during neutral beam injection heating on HL-2A [J]. Physics of Plasmas, 2017, 24(4): 042509.

[146] Chen W, Qiu Z, Ding X T, et al. Observation and theory of nonlinear mode couplings between shear Alfvén wave and magnetic island in tokamak plasmas [J]. EPL (Europhysics Letters), 2014, 107(2): 25001.

[147] Shi P, Qiu Z, Chen W, et al. Nonlinear mode coupling induced high frequency axisymmetric

mode on the HL-2A tokamak [J]. Nuclear Fusion, 2019, 59(8) : 086001.

[148] Shi P, Chen W, Wang Z, et al. Observation of off-axis sawtooth oscillations during the presence of nonlinear mode couplings in HL-2A NBI heated plasmas [J]. Nuclear Fusion, 2021, 61(9) : 096025.

[149] Ohshima S, Fujisawa A, Shimizu A, et al. Zonal flow driven by energetic particle during magneto-hydro-dynamic burst in a toroidal plasma [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2007, 49(11) : 1945 – 1952.

[150] Liu Y Q, Bondeson A, Fransson C M, et al. Feedback stabilization of nonaxisymmetric resistive wall modes in tokamaks. I. Electromagnetic model [J]. Physics of Plasmas, 2000, 7(9) : 3681 – 3690.

[151] Liu Y, Chu M S, Chapman I T, et al. Toroidal self-consistent modeling of drift kinetic effects on the resistive wall mode [J]. Physics of Plasmas, 2008, 15(11) : 112503.

[152] Cheng C, Chance M. NOVA: A nonvariational code for solving the MHD stability of axisymmetric toroidal plasmas [J]. Journal of Computational Physics, 1987, 71(1) : 124 – 146.

[153] Li Y, Hu S, Zheng W, et al. Drift Alfvén energetic particle stability with circulating particles [J]. Physics of Plasmas, 2020, 27(6) : 062505.

[154] Lin Z, Hahm T S, Lee W W, et al. Turbulent Transport Reduction by Zonal Flows: Massively Parallel Simulations [J]. Science, 1998, 281(5384) : 1835 – 1837.

[155] Wang W X, Lin Z, Tang W M, et al. Gyro-kinetic simulation of global turbulent transport properties in tokamak experiments [J]. Physics of Plasmas, 2006, 13(9) : 092505.

[156] Chen Y, Parker S E. A δf particle method for gyrokinetic simulations with kinetic electrons and electromagnetic perturbations [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 189(2) : 463 – 475.

[157] Jolliet S, Bottino A, Angelino P, et al. A global collisionless PIC code in magnetic coordinates [J]. Computer Physics Communications, 2007, 177(5) : 409 – 425.

[158] Zhu J, Fu G Y, Ma Z W. Nonlinear dynamics of toroidal Alfvén eigenmodes driven by energetic particles [J]. Physics of Plasmas, 2013, 20(7) : 072508.

[159] Candy J, Waltz R. An Eulerian gyrokinetic-Maxwell solver [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 186(2) : 545 – 581.

[160] Dorland W, Jenko F, Kotschenreuther M, et al. Electron Temperature Gradient Turbulence [J]. Physical Review Letters, 2000, 85(26) : 5579 – 5582.

[161] Kotschenreuther M, Rewoldt G, Tang W. Comparison of initial value and eigenvalue codes for kinetic toroidal plasma instabilities [J]. Computer Physics Communications, 1995, 88(2) : 128 – 140.

[162] Xu X Q, Cohen R H. Scrape-Off Layer Turbulence Theory and Simulations [J]. Contributions to Plasma Physics, 1998, 38(1-2): 158 – 170.

[163] Lütjens H, Luciani J-F. The XTOR code for nonlinear 3D simulations of MHD instabilities in tokamak plasmas [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(14): 6944 – 6966.

[164] Huysmans G, Czarny O. MHD stability in X-point geometry: simulation of ELMs [J]. Nuclear Fusion, 2007, 47(7): 659 – 666.

[165] Ferraro N M, Jardin S C, Snyder P B. Ideal and resistive edge stability calculations with M3D-C1 [J]. Physics of Plasmas, 2010, 17(10): 102508.

[166] Liu C, Jardin S C, Qin H, et al. Hybrid simulation of energetic particles interacting with magnetohydrodynamics using a slow manifold algorithm and GPU acceleration [J]. Computer Physics Communications, 2022, 275(2022): 108313.

[167] Fu G Y, Park W, Strauss H R, et al. Global hybrid simulations of energetic particle effects on the n=1 mode in tokamaks: Internal kink and fishbone instability [J]. Physics of Plasmas, 2006, 13(5): 052517.

[168] Kim C C. Impact of velocity space distribution on hybrid kinetic-magnetohydrodynamic simulation of the (1,1) mode [J]. Physics of Plasmas, 2008, 15(7): 072507.

[169] Briguglio S, Vlad G, Zonca F, et al. Hybrid magnetohydrodynamic-gyrokinetic simulation of toroidal Alfvén modes [J]. Physics of Plasmas, 1995, 2(10): 3711 – 3723.

[170] 王胜. 托卡马克中电阻撕裂模不稳定性的数值模拟 [D]. 杭州: 浙江大学, 2016.

[171] 张威. 霍尔效应对托卡马克撕裂模不稳定性的影响 [D]. 杭州: 浙江大学, 2017.

[172] Wang S, Ma Z W, Zhang W. Influence of driven current on resistive tearing mode in Tokamaks [J]. Physics of Plasmas, 2016, 23(5): 052503.

[173] Zhang W, Ma Z W, Wang S. Hall effect on tearing mode instabilities in tokamak [J]. Physics of Plasmas, 2017, 24(10): 102510.

[174] Zhang W, Ma Z W, Zhang H W, et al. Role of Hall effect on the resistive kink mode in tokamaks [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2020, 62(2): 025030.

[175] Zhang W, Ma Z W, Zhu J, et al. Core-crash sawtooth associated with m/n = 2/1 double tearing mode in Tokamak [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2019, 61(7): 075002.

[176] Zhang W, Ma Z W, Porcelli F, et al. Sawtooth relaxation oscillations, nonlinear helical flows and steady-state m/n=1 magnetic islands in low-viscosity tokamak plasma simulations [J]. Nuclear Fusion, 2020, 60(9): 096013.

[177] Zhang H W, Ma Z W, Zhang W, et al. Penetration properties of resonant magnetic perturbation in EAST Tokamak [J]. Physics of Plasmas, 2019, 26(11): 112502.

[178] Zhang H W, Lin X, Ma Z W, et al. Systematic simulation studies on the penetration of

resonant magnetic perturbations in an Experimental Advanced Superconducting Tokamak [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2021, 63(3): 035011.

[179] Zhang H W, Ma Z W, Zhu J, et al. Zonal flow generation and toroidal Alfvén eigenmode excitation due to tearing mode induced energetic particle redistribution [J]. Nuclear Fusion, 2022, 62(2): 026047.

[180] 祝佳. 聚变等离子体中高能量粒子与波相互作用的非线性数值模拟研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2014.

[181] Khodak A. Adaptation of general purpose CFD code for fusion MHD applications [C] // 2015 IEEE 26th Symposium on Fusion Engineering (SOFE). 2015: 1 – 5.

[182] Duan L, Wang X, Zhong X. A high-order cut-cell method for numerical simulation of hypersonic boundary-layer instability with surface roughness [J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(19): 7207 – 7237.

[183] Zhang H W, Zhu J, Ma Z W, et al. Acceleration of three-dimensional Tokamak magnetohydrodynamical code with graphics processing unit and OpenACC heterogeneous parallel programming [J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2019, 33(10): 393 – 406.

[184] Zhang W, Jardin S, Ma Z, et al. Linear and nonlinear benchmarks between the CLT code and the M3D-C1 code for the 2/1 resistive tearing mode and the 1/1 resistive kink mode [J]. Computer Physics Communications, 2021, 269(2021): 108134.

[185] Delucia J, Jardin S, Todd A. An iterative metric method for solving the inverse tokamak equilibrium problem [J]. Journal of Computational Physics, 1980, 37(2): 183 – 204.

[186] Lao L. https://w3.pppl.gov/ntcc/TORAY/G_EQDSK.pdf [H].

[187] Park W, Parker S, Biglari H, et al. Three-dimensional hybrid gyrokinetic-magnetohydrodynamics simulation [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1992, 4(7): 2033 – 2037.

[188] Chew G F, Goldberger M L, Low F E. The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1956, 236(1204): 112 – 118.

[189] Littlejohn R G. Variational principles of guiding centre motion [J]. Journal of Plasma Physics, 1983, 29(1): 111–125.

[190] Parker S E, Lee W W. A fully nonlinear characteristic method for gyrokinetic simulation [J]. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1993, 5(1): 77 – 86.

[191] Deng W J, Fu G Y. Optimization by marker removal for δf particle simulations [J]. Com-

puter Physics Communications, 2014, 185(1) : 96 – 105.

[192] Takahashi R, Brennan D P, Kim C C. Kinetic Effects of Energetic Particles on Resistive MHD Stability [J]. Physical Review Letters, 2009, 102(13) : 135001.

[193] Cai H S, Fu G Y. Hybrid simulation of energetic particle effects on tearing modes in tokamak plasmas [J]. Physics of Plasmas, 2012, 19(7) : 072506.

[194] Zhu X L, Chen W, Wang F, et al. Hybrid-kinetic simulation of resonant interaction between energetic-ions and tearing modes in a tokamak plasma [J]. Nuclear Fusion, 2020, 60(4) : 046023.

[195] Gao B, Cai H, Wang F, et al. Influence of trapped energetic ions on low-frequency magnetohydrodynamic instabilities with reversed shear profile [J]. Physics of Plasmas, 2021, 28(1) : 012104.

[196] Chen W, Ma Z, Zhang H, et al. Free-boundary plasma equilibria with toroidal plasma flows [J]. Plasma Science and Technology, 2022, 24(3) : 035101.

[197] 胡希伟. 等离子体理论基础 [M]. 北京 : 北京大学出版社, 2006.

[198] 陈文明. 类 ITER 弱磁剪切平衡位型的稳定性研究 [D]. 北京 : 北京大学, 2020.

[199] Zhang X, Gao B, Cai H, et al. Excitation of 2/1 fishbone-like modes by trapped energetic ions [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2020, 62(8) : 085010.

[200] Biglari H, Chen L. Influence of resistivity on energetic trapped particle-induced internal kink modes [J]. The Physics of Fluids, 1986, 29(6) : 1760 – 1764.

[201] Furth H P, Rutherford P H, Selberg H. Tearing mode in the cylindrical tokamak [J]. The Physics of Fluids, 1973, 16(7) : 1054 – 1063.

[202] Cai H, Wang S, Xu Y, et al. Influence of Energetic Ions on Tearing Modes [J]. Physical Review Letters, 2011, 106(7) : 075002.

[203] Li J H, Ma Z W. Nonlinear evolution of resistive tearing mode with sub-Alfvenic shear flow [J]. Journal of Geophysical Research: Space Physics, 2010, 115(A9) : 1 – 6.

[204] Zhang X, Li L J, Wang L C, et al. Influences of sub-Alfvénic shear flows on nonlinear evolution of magnetic reconnection in compressible plasmas [J]. Physics of Plasmas, 2011, 18(9) : 092112.

[205] Chen W, Zhu X, Wang F, et al. Resonant interaction of tearing modes with energetic-ions resulting in fishbone activities on HL-2A [J]. Nuclear Fusion, 2019, 59(9) : 096037.

[206] Ross D W, Chen G L, Mahajan S M. Kinetic description of Alfvén wave heating [J]. The Physics of Fluids, 1982, 25(4) : 652 – 667.

[207] Chen W, Xu Y, Ding X, et al. Dynamics between the fishbone instability and nonlocal transient transport in HL-2A NBI plasmas [J]. Nuclear Fusion, 2016, 56(4) : 044001.

[208] Farber R. Parallel programming with OpenACC [M]. Amsterdam : Morgan Kaufmann, 2016.

[209] Wang E, Zhang Q, Shen B, et al. Intel Math Kernel Library [M] // High-Performance Computing on the Intel® Xeon Phi™: How to Fully Exploit MIC Architectures. Cham : Springer International Publishing, 2014 : 167 – 188.

[210] Střelák D, Filipovič J. Performance analysis and autotuning setup of the cuFFT library [C] // Proceedings of the 2nd Workshop on AutotuniNg and aDaptivity AppRoaches for Energy efficient HPC Systems. 2018 : 1 – 6.

[211] Yang X, Sun Y, Liu Y, et al. Modelling of plasma response to 3D external magnetic field perturbations in EAST [J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2016, 58(11) : 114006.

[212] Bécoulet M, Nardon E, Huysmans G, et al. Numerical study of the resonant magnetic perturbations for Type I edge localized modes control in ITER [J]. Nuclear Fusion, 2008, 48(2) : 024003.

致 谢

当准备写致谢时，我认识到自己即将面对的是人生新的十字路口，昔日的每一个选择最终串成今日的点点滴滴。回顾过去的九年时光，特别是在物理系这五年直博期间，我很感激我所遇到的许许多多良师益友。

首先要特别感谢我的博士论文导师马志为教授，对我多年来的悉心指导和帮助。从大二那年在 cc98 论坛发帖询问马老师办公室在哪，到今日认识马老师已接近八年，而与马老师的交流和讨论也几乎贯穿了我的整个浙大生涯。这些年，令我感受最深和对我影响最大的应当是马老师的科研热情和职业态度，包括马老师牺牲休息时间，在假期、在深夜帮我修改论文，并给予我最快速的反馈。而对于学生的研究工作，即便如我本科期间魔改程序后算出的第一个“不靠谱”的模拟结果，马老师都会给予充分的尊重并与我共同探讨其中的是非对错。我攻读博士学位期间，马老师在等离子体数值模拟方面的深厚造诣是我推进研究课题的坚实后盾。当我陷入科研瓶颈或者低谷时，马老师能给予最大的帮助和鼓励，和我共同分析可能的物理机理与程序问题，从而使我保持思考和探索的精神，并得以感受到最终突破困难、解决问题的喜悦。

我也十分感谢聚变中心的仇志勇教授。包括我博士刚入学时，仇老师带我们打球，帮助我融入聚变中心这个团队；还有对我在本论文相关科研工作上的指导和英文论文的修改，使得我的研究工作得到完善和改进；以及在我数次隔离期间给予我的关心和帮助。仇老师严谨认真的治学态度和亦师亦友的处事风格让我的求学时光充满收获和乐趣。

感谢陈骝教授、傅国勇教授、核工业西南物理研究院的陈伟老师、等离子体所的孙有文老师和北大的陈文明博士，与他们多次在模拟研究结果和数值模拟程序方面的交流讨论对我推进研究工作起到了重要的帮助。感谢聚变中心的盛正卯教授、武慧春教授、肖维文老师和肖湧教授对我给予的指导和帮助，与各位老师的交流讨论以及老师们丰富各异的研究方向都给我留下了深刻的印象。感谢中心秘书李嘉宁女士和傅晓宇在诸多事务上对我的尽心尽力的帮助和支持。

感谢祝佳师兄、张威师兄和王胜师兄在科研内外的诸多建议和关心，并给我留下了非常优秀的数值模拟程序，让我得以在其基础上添砖加瓦，并顺利完成该本论文的研究工作。非常感谢李灵杰师兄、陈通师兄和钱仁锋师兄在我接触数值模拟初期的耐心指导，帮助我在入门阶段逐渐找到科研的乐趣和动力。感谢课题组的陈文锦师兄、梁集师兄、王鑫、林啸、黄家兴、张晗潇、张敏、孙泽君、杜嘉诚、王捷、Tyler，以及中心的冯智晨学长、王

涛学长、汪启学长、赵忱学长、魏西硕学长、李跃岩学长、项锡锦学长、梁天奕、胡天行、魏士朝、张宇、尉国栋、贾报报、蒋沛攸、杨宏伟、宁小川、钟奇、梁洞航、陈凝飞、刘述军、李耕贤、杨定坤、张璐璐和段一豪等同学，一起游山玩水，一起学习进步。

我的博士生涯是十分幸运的，遇良师，得好友，拥知己。我衷心感谢郭苓在这些年对我的宽容和理解，感谢我们在对方成功瞬间的欢欣喜悦，更感谢在彼此低谷时期的相互扶持、互相鼓劲和坚持不懈。

感谢父母对我的无私付出和养育之恩，其一言一行是我人生中受到的最好的教育，而他们对我的信任也使我对生活和工作保持热忱。

最后，愿新冠疫情早日结束，让我们的生活重回正轨。

张豪伟

2022 年 5 月　玉泉

作者简历

张豪伟，男，1995 年出生，汉族，浙江东阳人。

1. 教育经历：

i. 2013-2017 年，浙江大学，物理学系，物理学专业，理学学士学位；

ii. 2017-2022 年，浙江大学，物理学院，等离子体物理专业，攻读理学博士学位。

2. 攻读博士学位期间发表/撰写的论文：

i. **HW Zhang**, J Zhu, ZW Ma*, GY Kan*, X Wang, and W Zhang, Acceleration of three-dimensional Tokamak magnetohydrodynamical code with graphics processing unit and OpenACC heterogeneous parallel programming, International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2019, 33(10), 393-406;

ii. **HW Zhang**, ZW Ma*, W Zhang, YW Sun, and X Yang, Penetration properties of resonant magnetic perturbation in EAST Tokamak, Physics of Plasmas, 2019, 26(11), 112502;

iii. **HW Zhang**, X Lin, ZW Ma*, W Zhang, and TE Bagwell, Systematic simulation studies on the penetration of resonant magnetic perturbations in an Experimental Advanced Superconducting Tokamak, Plasma Physics and Controlled Fusion, 2021, 63(3), 035011;

iv. **HW Zhang**, ZW Ma*, J Zhu, W Zhang, and ZY Qiu, Zonal flow generation and toroidal Alfvén eigenmode excitation due to tearing mode induced energetic particle redistribution, Nuclear Fusion, 2022, 62(2), 026047;

v. **HW Zhang**, ZW Ma*, and J Zhu, Validation of the current and pressure coupling schemes in CLT-K code: the linear stability of m/n = 2/1 tearing mode in the presence of energetic particles, to be submitted;

vi. **HW Zhang**, ZW Ma*, and T Chen, Application of the effective resistivity in MHD and Hall MHD simulations for collisionless magnetic reconnection, arXiv preprint arXiv:2201.12756, to be submitted;

主要共同作者论文：

i. ZW Ma*, T Chen, **HW Zhang**, and MY Yu, Effective resistivity in collisionless magnetic re-

connection, Scientific Reports, 2018, 8(1), 10521;

ii. W Zhang, SC Jardin, ZW Ma*, A Kleiner, and **HW Zhang**, Linear and nonlinear benchmarks between the CLT code and the M3D-C1 code for the 2/1 resistive tearing mode and the 1/1 resistive kink mode, Computer Physics Communications, 2021, 269, 108134;

iii. WJ Chen, ZW Ma*, **HW Zhang**, W Zhang, and LW Yan, Free-boundary plasma equilibria with toroidal plasma flows, Plasma Science and Technology, 2022, 24, 035101;

iv. L Guo, **HW Zhang**, and HC Wu*, High-frequency radio-wave emission by coherent transition radiation of runaway electrons produced by lightning stepped leaders, submitted to Physics of Plasmas.