

分类号: O241.5

单位代码: 10335

密 级:

学 号: 11735018

浙江大学

博士学位论文



中文论文题目: 两类偏微分方程随机反源问题研究

英文论文题目: Study on Two Types of Inverse
Random Source Problems of PDEs

申请人姓名: 龚宇璇

指导教师: 徐翔

专业名称: 计算数学

研究方向: 数学物理反问题

所在学院: 数学科学学院

论文提交日期: 二〇二二年四月

两类偏微分方程随机反源问题研究



论文作者签名: _____

指导教师签名: _____

论文评阅人 1:	_____	隐名
评阅人 2:	_____	隐名
评阅人 3:	_____	隐名
评阅人 4:	_____	隐名
评阅人 5:	_____	隐名

答辩委员会主席:	_____	徐定华	教授	浙江理工大学
委员 1:	_____	徐定华	教授	浙江理工大学
委员 2:	_____	张磊	教授	浙江工业大学
委员 3:	_____	赖俊	教授	浙江大学
委员 4:	_____	鲁汪涛	教授	浙江大学
委员 5:	_____	仲杏慧	教授	浙江大学

答辩日期: _____ 二〇二二年六月

Study on Two Types of Inverse
Random Source Problems of PDEs



Author's signature: _____

Supervisor's signature: _____

External Reviewers: _____ Anonymous
_____ Anonymous
_____ Anonymous
_____ Anonymous
_____ Anonymous

Examining Committee Chairperson:

Dinghua Xu Prof. Zhejiang Sci-Tech University

Examining Committee Members:

Dinghua Xu Prof. Zhejiang Sci-Tech University
Lei Zhang Prof. Zhejiang University of Technology
Jun Lai Prof. Zhejiang University
Wangtao Lu Prof. Zhejiang University
Xinghui Zhong Prof. Zhejiang University

Date of oral defence: June 2022

浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 浙江大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：

签字日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 浙江大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：

导师签名：

签字日期： 年 月 日 签字日期： 年 月 日

致 谢

时光荏苒，不经意间在求是园的五年博士生涯已经进入了尾声。值此论文完成之际，谨向这五年来给予我教导，陪伴我成长的师长和亲友们表示衷心的感谢。

首先感谢我的导师徐翔教授，感谢他一直以来如沐春风般地教导和指引。在学习和工作上，自我本科的毕业设计开始，徐老师就以他深厚的专业知识和丰富的科研经验为我的科研之路指引方向。时常鼓励我多去思考，多去探索，尽他所能地为我提供最好的科研工作环境和机会。每当我在学习中遇到困难时，他总是会在第一时间回复，并且在处理问题时表现出的耐心和毅力也深深地影响了我。同时，徐老师也时常关心我的生活情况。在我赴美国交流一年期间，新冠疫情的爆发让我遇上了许多前所未有的困难，即使远隔万里，他也时常询问我是否需要更多帮助，让我十分感动。而在即将毕业之际，我对未来的前行道路存在迷茫时，徐老师也常常为我答疑解惑，为我指出众多可能性和方向。在此感谢徐老师带我一路成长，并在学习和生活等各个方面给予我的帮助和支持。因为有他的指导，我的五年博士生涯才能如此快乐顺利而又收获良多。

感谢普渡大学的李培军教授，虽然在普渡大学跟随李老师学习的时间只有短短一年，但是其间收获的知识和经历却是让我受益一生的。李老师有着扎实的数学功底，对于科研一直保有着最为纯粹的热情和钻研不懈的精神。他对于许多数学问题总有自己独到的见解，对于领域的最前沿的发展了若指掌。与徐老师一样，他总是在我的研究遇到瓶颈时温和而耐心地指导我，帮助我突破难关。在我回国之后，李老师依然在科研上给予我许多指引，并且为我未来的发展提出了建议。除此之外，李老师也十分关心我的生活情况，从除夕的年夜饭到感恩节的火鸡，从中秋的月饼到课题组森林公园的出游，李老师对生活的热爱深深感染着我，他不光是我交流时期的导师，也更是我今后学习的榜样。

除此之外，我还要感谢课题组的丁益斌师兄、蒋晓颖师姐、以及师妹马语柔、李晓雯、章钰斐、徐佳丽，师弟魏宇杰、袁骁。和他们一起讨论数学问题、聚餐、日租十分快乐。大家彼此关心，相互照顾，让本有些枯燥的研究工作变得有趣了许多。感谢在美国交流时期给予了我许多帮助的王旭师姐、陈艳利师姐、陈昱师兄和李晓蕾。尤其是王旭师姐，在交流期间，她为了减少我的感染风险，开车带我往返于学校和住所，并且和我一起去超市购买生活必需品，帮助我度过在美有疫情的日子。在回国之后，她也经常在我科研上有疑问时不吝回答，给予我最大的帮助。感谢同

在一个大课题组的胡斌师兄、刘华彦师姐、刘远通师兄、臧耀华师兄、林怡雯师姐、张明明、以及马畅师妹。听他们分享自己的科研工作内容和生活上的所见所感令我收获许多。

感谢博士期间遇到的朋友们。陪我走过一程的室友任安妮学姐、刘赛赛、郑楠和王书灵，和她们一起相处的日子快乐而简单。感谢从本科起一直帮助我，陪伴我的好友杨思佳、葛宇昊、李予安和王韵佳，和你们在一起总能让我获得无与伦比的能量，愿我们的友谊长存。

感谢从本科开始伴我成长的灵韵音乐剧社。感谢《来自远方》剧组的梁李静、万钧涵、杨晨璇等剧目组的成员、音乐组的小伙伴赵梦颖、刘雨婷等朋友。你们总能给我无限的快乐，让我的博士生涯丰富多彩。

最后，感谢我的父母和亲人在我读博期间给我的莫大关怀和支持。是他们的理解与关爱让我能够毫无后顾之忧地在学术道路上走到今天。感谢我的姥爷郑汉敦同志，他对工作严谨的态度和对生活的热爱一直影响着我，相信您一定在天上也为我今天所获得的成就所高兴。此外，特别感谢我的男友冯宁给予我的关怀和帮助，他总是在我身边，喜忧共担。能够在浙大与他相识相知是我的幸运。

谨以此文先给所有关心我的家人、老师、朋友和同学，和你们共度的日子将永远是我珍藏于心的宝贵财富。

龚宇璇

二〇二二年六月

于求是园

摘 要

反问题一般指的是从观察到的输出数据或响应中确定输入数据或来源的一类问题. 这类问题长期以来广泛存在于自然科学和实际生活中的各个领域. 而经典的反源问题则是在已知相应定解的正问题解的部分信息和方程的边界条件的情况下, 研究如何确定其方程中未知的非齐次项, 或非齐次项的部分函数的问题. 反源问题因其自身在各个领域的重要应用在过去的半个世纪得到了重点关注. 而对于存在随机变量的反源问题来说, 其描述的问题更具有一般性和普适性, 也存在更大的研究价值.

本文主要研究了二维双调和方程, 一维有界区域的分数阶扩散方程, 和无界区域上一、二、三维的分数阶扩散方程的随机反源问题.

在对二维双调和方程的研究中, 我们在有色噪声驱动非齐次项的假设下, 首先推导出针对这一方程的格林函数, 并且给出其正问题弱解的解析表达式. 通过分析其格林函数的有界和连续性质及 Young 不等式, 给出了弱解中随机积分适定性的证明, 通过构造一族连续的适定解证明了其弱解的存在唯一性和适定性. 随后, 我们将随机反源问题等价转化为求解两个第一类 Fredholm 积分方程. 在数值求解上, 由于这类方程求解问题是不适定的, 在这里我们采用吉洪诺夫正则化方法来解决这一问题, 并且通过 L 曲线法确定正则化参数. 并且在最后给出数值算例说明算法的稳定性和有效性.

一般对于分数阶的扩散方程, 常用的方法是通过 Mittag-Leffler 函数构造方程正问题的解析解, 并且对其进行分析, 而由于我们文中的随机源是由空间域上的噪声驱动, 我们无法利用 Mittag-Leffler 函数得到的弱解形式的解. 因此在对于限定在一维有界区域的分数阶扩散问题的研究中, 我们首先将源函数在时间域上将其延拓到负轴, 并且对问题进行傅里叶变换, 将时空域上的原问题等价地转换为一个空间域和频域上的两点边值问题. 随后, 通过构造频域上问题的格林函数, 我们得到其频域问题正问题弱解的适定性和正则性. 随即证明原问题的解可以利用频域上问题的解的逆傅里叶变换等价得到, 从而等价地证明原问题解的适定性. 对于反问题, 我们可以证明随机源的扩散系数的傅里叶变换模可以通过频域上等价方程的解的方差唯一确定. 并且通过相位还原的算法, 通过增加测量值的方式利用扩散系数的傅里叶模唯一重构了随机源扩散系数的绝对值. 最后, 我们通过数值实例说明了该算法的有效性和稳定性.

最后, 我们将对分数阶扩散方程的研究延拓到了无边界区域上. 并且对这类区域下一、二、三维的分数阶扩散方程的随机反源问题进行了研究和说明. 通过和一

维有界区域下相同的方法, 我们对傅里叶变换后频域上的等价问题适定性进行研究, 证明了原问题解的适定性, 并且对相应的反问题给出了理论分析和不稳定性说明.

关键词: 反源问题; 随机偏微分方程; 格林函数; 正则化; 傅里叶变换; 相位还原

Abstract

The inverse problems generally refer to a class of problems in which the input or source terms are determined from the observed output data or system responses. Such problems have long existed in various fields of science technology and actual lives. The classic inverse source problem of partial differential equations is to determine the unknown inhomogeneous sources in the equations, or part of the inhomogeneous term, if part of the solution of the direct problem and the corresponding boundary conditions are known. In the past half century, the inverse source problems have received massive attention due to their important applications in various fields. Particularly, when the source terms involve uncertainties, i.e., the inverse problem becomes the inverse random source problem, it can describe the actual situation more generally, and has wider application.

This thesis mainly studies the inverse random source problems of biharmonic equation in two dimensions, and the fractional sub-diffusion equation in both bounded one dimensional domain and unbounded domains up to three dimensions.

In the study of the two dimensional biharmonic equation, we deduce the equation's Green's function and give the explicit mild solution to the direct problem, under the assumption that the random source is driven by the colored noise. By using the Young's inequality and analyzing the square integrable and continuous properties of the Green's function, the well-posedness of the stochastic integral in the mild solution is given, and hereafter the existence, uniqueness and well-posedness of the mild solution are proved by constructing a sequence of continuous well-posed solutions. As for the inverse problem, we convert it to solving two Fredholm integral equations and choose Tikhonov regularization method to deal with the ill-posedness of these integral equations, and use L-curve method to select the moderate regularization parameter. Additionally, the numerical examples are given to validate the effectiveness and stability of the proposed method.

Generally speaking, the most common method to solve the fractional sub-diffusion equation is using Mittag-Leffler function to constructing the explicit solution. However, since the random source we deal with is driven by the spatial noise, this Mittag-Leffler function method is no longer applicable. Consequently, in the study of the

fractional sub-diffusion problem constrained in a one-dimensional bounded domain, we first extend the source function to the whole region, and perform Fourier transform on the problem to convert the time-space problem equivalently into a two-point boundary value problem in the frequency-space domain. Then, by constructing the Green's function of the converted problem, we obtain the well-posedness and regularity of the mild solution to the direct problem in the frequency domain. By using the equivalency of Fourier transform, the solution to the original problem can be obtained immediately, so as to the regularity and well-posedness of the original solution. As for the inverse problem, we show that the Fourier modulus of the sub-diffusion coefficient of the random source can be uniquely determined by the variance of the solution in the frequency domain. And through the algorithm of phase retrieval, we show that the absolute value of the sub-diffusion can be uniquely obtained by the Fourier modulus with extra measurements. Additionally, the numerical examples are given to validate the effectiveness and stability of the proposed method.

Finally, we extend the study of fractional sub-diffusion equations to unbounded several dimensions. By the same Fourier method as in the one-dimensional bounded domain, we prove the well-posedness of the mild solution of the direct problem and theoretically prove that the sub-diffusion coefficient can be uniquely obtained.

Keywords: Inverse source problems; Stochastic PDEs; Green's function; Method of regularization; Fourier transform; Phase retrieval;

图 目 录

1.1	椭圆方程柯西问题的区域示意图	3
3.1	薄板构造及受力示意图	25
3.2	板形变前后位移状态在 xy 平面的示意图	28
3.3	核函数分别为 $G(x, y)$ (左) 和 $G^2(x, y)$ (右) 的 Fredholm 积分算子的奇 异值分布 (对数刻度下)	43
3.4	点外力为 20N, 实验次数 500 次后求平均的正问题函数求解图像 . . .	47
3.5	区域内每一点上求得的刚度系数 D (准确值为 0.05)	48
3.6	算例 3.1 的源函数正则化参数选取	48
3.7	随机源期望 g 的重构结果	48
3.8	随机源方差 h^2 的重构结果	49
3.9	点外力为 10N, 实验次数 500 次后求平均的正问题函数求解图像 . . .	49
3.10	区域内每一点上求得的刚度系数 D (准确值为 0.15)	50
3.11	算例 3.1 的源函数正则化参数选取	50
3.12	随机源期望 g 的重构结果	50
3.13	随机源方差 h^2 的重构结果	51
4.1	γ_R 的区域表示	55
4.2	算例 3.1 的源函数重构结果, 红色虚线为真实值, 蓝色实线为重构后的值	72
4.3	算例 4.2 的源函数重构结果, 红色虚线为真实值, 蓝色实线为重构后的值	72
4.4	不存在数据误差时算例 4.3 的源函数重构结果, 红色虚线为真实值, 蓝 色实线为重构后的值	73
4.5	数据误差有 3% 时算例 4.3 的源函数重构结果, 红色虚线为真实值, 蓝 色实线为重构后的值	73
4.6	数据误差有 5% 时算例 4.3 的源函数重构结果, 红色虚线为真实值, 蓝 色实线为重构后的值	74

表 目 录

3.1	确定性正问题在不同步长下的解与其相应的相对误差	47
4.1	$\alpha = 0.2$ 时确定性正问题解 $u(0, t)$ 在不同步长下的结果	71
4.2	$\alpha = 0.4$ 时确定性正问题解 $u(0, t)$ 在不同步长下的结果	71
4.3	$\alpha = 0.6$ 时确定性正问题解 $u(0, t)$ 在不同步长下的结果	71
4.4	$\alpha = 0.8$ 时确定性正问题解 $u(0, t)$ 在不同步长下的结果	71

目 次

致谢	I
摘要	III
Abstract	V
图目录	VII
表目录	VIII
目录	
1 绪论	1
1.1 选题背景与意义	1
1.2 几类重要的反问题	3
1.2.1 椭圆方程柯西问题 (Cauchy Problems of Elliptic Equations)	3
1.2.2 几何反问题 (Inverse geometric problems)	3
1.2.3 反系数问题 (Parameter identification problems)	4
1.2.4 反源问题 (Source identification problems)	5
1.3 随机反源问题	5
1.4 本文的研究内容与组织结构	7
2 预备知识	9
2.1 不适定性与正则化方法	9
2.1.1 适定与不适定问题	9
2.1.2 正则化方法	12
2.2 随机源的定义	16
2.2.1 随机过程	16
2.2.2 白噪声	18
2.2.3 有色噪声	21
3 二维双调和方程的随机反源问题	24
3.1 引言	24
3.2 薄板理论的介绍	25
3.2.1 薄板的定义、模型、及应力与应变分析	25
3.2.2 边界条件	30
3.3 模型正问题分析	31
3.3.1 确定性正问题求解分析	32

3.3.2 随机方程构成与分析	35
3.4 随机反问题	40
3.4.1 积分方程	40
3.4.2 数值方法	41
3.5 数值算法	44
3.5.1 模型数据及正问题求解	44
3.5.2 反系数问题	45
3.5.3 随机源求解重构	45
3.5.4 数值算例及结果分析	46
3.6 本章小结	51
4 一维分数阶扩散方程随机反源问题	52
4.1 引言	52
4.2 分数阶导数及其傅里叶变换	54
4.3 正问题的适定性分析	56
4.3.1 频域下正问题分析	56
4.3.2 时域下正问题分析	59
4.4 反问题分析及求解算法	60
4.4.1 频域下随机源模重构	60
4.4.2 时域下随机源重构 (相位还原)	63
4.4.3 数值算法	66
4.5 数值算例及结果分析	67
4.5.1 正问题数值离散	67
4.5.2 相位提升 (PhaseLift) 算法应用	70
4.6 本章小结	74
5 无边界分数阶扩散方程随机反源问题	75
5.1 引言	75
5.2 问题描述	75
5.3 正问题的适定性分析	76
5.3.1 频域下正问题分析	76
5.3.2 频域下问题的适定性	82
5.3.3 时域下的正问题分析	84
5.4 反问题的理论分析	85
5.4.1 频域下随机源模重构	86

5.5 本章小结 89

6 总结与展望 90

6.1 主要创新点 90

6.2 未来工作展望 90

参考文献 92

作者简介 100

1 绪论

1.1 选题背景与意义

在过去的半个世纪,反问题在科学和工程的各个分支中越来越受到研究者的关注,关于反问题的各类应用以及反演方法的理论研究文献也在飞速增长.反问题一般指的是从观察到的输出数据或响应中确定输入数据或来源,而与之相反的正问题则是利用已知的输入数据或来源来求解输出数据或响应结果.从数学方程的角度来讲,我们可以用微分方程(组)来表示一个数学系统,当我们给定一个微分算子和其边界或初值条件,我们总可以找到满足其相应的初/边值问题的适定的解.而反问题则是根据正问题这一定解问题的部分解信息作为额外观测数据,求解整个系统中的一些未知量,如定解问题的区域、方程的系数、或是方程的非齐次项等等.

通过观测数据来寻找诱因是很早就被人们关注的问题,例如早在 200 年前,拉普拉斯就提出了引力场的反问题.对于质量分布为 f 的物体,假设 f 在一个类球有界区域 Ω 外为零,且物体的引力场为 u .则两者可以通过引力 ∇u 与质量分布的关系表示,在 $\mathbb{R}^3$ 中写成泊松方程的形式:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) &= 0. \end{aligned}$$

那么引力场问题的正问题则是在给定质量分布 f 的情况下,求解引力场 u .这是一个适定的问题,因为对任意满足假设且可积的函数或分布 f ,都存在唯一且稳定的解 u ,并且可以通过各类方法在数值上进行求解.而其相应的反问题则是在给定 Γ 上的引力 ∇u 或引力场 u 时,求解该物体未知的的质量分布的问题,其中 Γ 是区域边界 $\partial\Omega$ 的一部分.这一经典的反源问题因其在天体质量测算、重力导航等方面的重要应用在近一个世纪以来被许多研究者分析和讨论[1-3].

因为反问题广泛的应用领域和数学理论的建立,其天生就具有跨学科性质,我们可以在几乎所有的科学和工程领域中找到对于反问题的研究.其中最为有名且成功的便是 X 光断层扫描 (X-ray Computed Tomography),这一技术利用从各个方向拍摄的 X 射线阴影图像重建断层图像,已经在生物医学成像上被广泛使用,在许多领域产生了巨大影响.其他关于反问题研究的重大应用包括断层光学显微镜成像、波场的反散射问题,通过边界上的温度测量来设备未知的导热率,地质研究和石油勘探,以及材料力学性质的推定等等.甚至关于历史的追溯推理、自然气候的归纳、物种进化的推论,都可以看做是一类反问题.

虽然大家对各类反问题和应用并不陌生,但是它并没有明确的定义.一般来说反问题指的是通过输出来确定输入,但是这一定义在许多情况下并不适用.我们可以通过将正问题看做与反问题对应的关系,给出明确且合理的定义[4].一般来说,对于一个可以被微分方程表示的系统中,求解一个正问题需要满足下列条件已知:

1. 问题所在的区域以及边界;
2. 区域内描述问题的方程;
3. 对于整个边界的边界条件和/或初值条件;
4. 方程内部的每个参数;
5. 方程的源函数,即非齐次项.

当上述条件均已知时,我们可以通过数学分析和数值算法求出其相应的解.如果上述五个条件中有任意一条或几条未知或不完全,这就出现了相应的反问题.对于未知条件的确定往往需要正问题的解或部分解数据已知.而又因为通常这类数据来自于实验,所以往往会产生噪声,这也是反问题所关心的重要问题.通常,反问题可以是以下问题之一,这些问题对应这上述必需条件的未知:

1. 确定问题的部分边界区域;
2. 推导控制系统的方程;
3. 确定方程的边界条件和/或初值条件;
4. 确定方程内的某个或某些参数;
5. 确定方程的源函数,即非齐次项.

相较于已经被广泛研究了两个多世纪的正问题,反问题的系统性研究历史却很短,也有更多未解决的难题.相较于正问题来说,反问题的求解无论是解析上还是数值上,往往都存在更多的困难:其系统的非线性是原因之一,但更大的难题在于反问题的不适定性.后者既导致了大部分的反问题无法拥有唯一解甚至解不存在,同时,大部分反问题的不适定性也无法让解对观测数据连续依赖性,输入的数据中极小的扰动都可能导致很大的求解误差.因此在对反问题的解进行理论分析和数值求解时,总会将问题进行正则化来解决这些问题,例如吉洪诺夫正则化、模型正则化等等.

1.2 几类重要的反问题

1.2.1 椭圆方程柯西问题 (Cauchy Problems of Elliptic Equations)

椭圆方程柯西问题主要应用于热检测、电法勘探、地球物理以至于医学成像中[5–8]. 在这类问题中, 正问题的解以及其边界上的法向导数仅在解所在区域边界的一部分上给定, 而其余部分的边界数据由于物理实验上或几何本身造成的困难而无法获得. 例如对于一个矩形区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, 其边界为 $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_0$, 如图 1.1 所示, 且有 Ω 上的柯西问题:

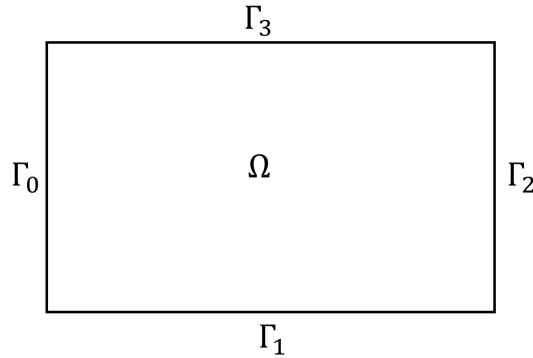


图 1.1 椭圆方程柯西问题的区域示意图

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = f & x \in \Omega, \\ u(x) = g_1 & x \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g_1 & x \in \Gamma_2, \\ u(x) = u_d & x \in \Gamma_2, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g_3 & x \in \Gamma_3. \end{cases}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是一个二阶椭圆算子, f, g_1, g_2, g_3, u_d 均为已知, $\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n$ 是边界法向导数. 在反柯西问题中, 边界 Γ_0 上的数据未知, 需要通过已给出的边界条件信息确定, 目的是为了进一步求解这一方程的正问题. 对于柯西反问题的数值求解, 在过去的三十年中已有了许多不同的方法, 例如最早被用来求解不适定柯西问题的准可逆方法 (quasi-reversibility method)[9,10], 或者是通过迭代以及其他正则化方法求解[11,12].

1.2.2 几何反问题 (Inverse geometric problems)

几何反问题是一类有着众多应用的反问题, 其主要反演对象为缺省的区域或边界形状, 因此, 这类反问题可以用于对障碍物、空腔、夹杂物、缺陷、空隙或裂缝等区域形状进行反演和建模. 另外, 它们也被广泛应用在典型的医学应用中, 用以检测身体内部的肿瘤等异常情况.

例如反散射问题 (Inverse Scattering Problem)[13] 中的反障碍物散射 (inverse obstacle scattering) 问题, 即为通过散射波的波场数据反演均匀背景介质中的障碍

物边界形状. 设 $u(\mathbf{x})$ 是二维空间上的散射波, 则其满足以下亥姆霍兹方程

$$\Delta u(\mathbf{x}) + \kappa^2(1 + q(|\mathbf{x}|))u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \partial_{|\mathbf{x}|}u - i\kappa u = o(|\mathbf{x}|^{-1/2}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

其中 κ 是波数, $q(|\mathbf{x}|)$ 代表非均质介质. 则反问题为利用散射波的远场数据 u^∞ 或是障碍物边界外部有界点集上的散射波 $u(\mathbf{x})$, 确定物体的边界形状.

1.2.3 反系数问题 (Parameter identification problems)

微分方程的反系数问题是反问题中的一个重要子类, 这些系数一般代表了方程所描述物理过程的内在特质. 其主要应用的领域和方程有以下几类:

1. 热传导反问题 (Inverse heat transfer problems, IHTP) [14] 是一类经典数学物理反问题, 它的数学模型基于抛物型偏微分方程. 若物体的温度分布场 $T(x, t)$ 在区域 $\Omega \times (0, t_{\max}]$ 上有以下方程表示:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + K \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_{\max}], \\ T(x, 0) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ T(x, t) &= g(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, t_{\max}]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 C, λ, K 是时间或/和空间相关的函数, 分别表示体积热容量, 热导率和对流系数. 则反系数问题为通过已有的信息和 $T(x, t)$ 在内部某点的温度分布 $h(t)$ 确定热导率 λ .

2. 材料力学性质确定是一类利用弹性材料的形变程度数据来反演材料的力学性质的反问题, 一维情况下我们有以下数学模型:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= F(x), \quad x \in (0, L) \\ w(0) &= w''(0) = w(L) = w''(L) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中 $w(x)$ 是形变挠度, $E(x)$ 是杨氏模量, $I(x)$ 是转动惯量, $F(x)$ 是附加的外部荷载力. 则反问题的描述为在给定负载力和形变挠度的前提下反演材料的力学性质 $E(x)I(x)$.

3. 电阻抗断层扫描问题 (Electrical impedance tomography, EIT) [15] 是一个利用物质表面测量得到的电流和电压确定物质内部阻抗分布的反问题, 其数学模型是一个椭圆偏微分方程:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中 u 为电压分布, f 是边界电压, $\sigma(\mathbf{x})$ 是需要反演求解的电导率系数. 因此这一问题的数学描述即为通过边界的电压分布 $f(\mathbf{x})$ 和电流分布 $\sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n}$ 确定 Ω 区域上的 $\sigma(\mathbf{x})$.

4. 声波的反介质问题 (Inverse medium problem)[16] 是反散射问题 (Inverse scattering problem) 中的另一个类型, 问题构成为在满足式(1.1)的基础上, 通过给定边界上的波场数据 $u(\mathbf{x})$ 和一系列波数 κ_i 确定未知的介质特征 $q(|x|)$.

1.2.4 反源问题 (Source identification problems)

本论文的研究工作主要集中在这类反问题上, 经典的反源问题是在已知相应定解的正问题解的部分信息和方程的边界条件的情况下, 研究如何确定其方程中未知的非齐次项, 或非齐次项的部分函数的问题. 而在过去的几十年里, 因其自身在各领域的重要应用和计算数学的飞速发展, 无论从物理和工程领域[17,18], 还是从数学领域[19], 反源问题都得到了大量的关注和研究, 例如热源推定[20], 电磁场的源项反演[21], 即亥姆霍兹方程的源项反演等等.

1.3 随机反源问题

随机反源问题指的是带有不确定项的反源问题, 近年来在各类数学模型中得到了广泛的应用. 这是因为随机项可以用来表示某些系统本身就带有的随机性, 或表示系统中无法确定的参数, 亦或是用于耦合那些不同尺度的干扰, 尤其是这些干扰的量级差距很大的时候. 但由于其随机性和不确定性, 相较于确定性的反源问题, 随机反源问题除了本身存在的不适定性之外还存在着许多更多的困难. 例如, 不同于确定性反问题的经典解, 随机反问题的解是一个随机函数, 因此, 找到随机性下某一个实现的解是没有意义的, 而常用于计算统计量蒙特卡洛方法往往需要比相应的经典反问题多几个数量级的计算资源, 因此我们需要寻找更合适的模型和算法来解决这类问题.

尽管对反问题以及其中反源问题的系统研究已经有了长足的发展, 但是我们对随机情况下的反源问题的研究还很欠缺. 就我们所知, 这类问题最早起于对波传播问题的研究, 这也被认为是解决反射层析成像、基于扩散的光学层析成像、和荧光显微镜成像[22] 等问题的基本工具. 1979 年 Devaney[23] 证明了其随机源的自相关方程可以被相应的随机波场的自相关方程唯一控制. 最近, 一种新颖且有效的方法提出可以将随机源表示为一个维纳过程. 在这样的假设下, 一维情形下波的传播可

以由一个空间上带有白噪声的随机亥姆霍兹方程表示:

$$\Delta u(x, \omega) + \omega^2(1 + q(x))u(x, \omega) = f(x),$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}}(\partial_r u - i\omega u) = 0, \quad \mathbf{r} = |\mathbf{x}|.$$

这里随机源由一维白噪声驱动 $f(x) = g(x) + h(x)dW_x$, 作者针对均匀介质 ($q(x) = 0$) [24] 和非均匀介质 ($q(x) \neq 0$) [25] 的情况分别开发了有效的计算方法, 实现了利用多频率下随机波场 u 的边界测量数据来反演随机源函数的均值和方差. 随后, [26, 27] 将这样的白噪声模型推广到二维和高维空间, 定义了彩色噪声驱动下的随机亥姆霍兹方程. 并给出了其理论上的适定性证明, 提出了有效的数值算法.

随后, 许多研究者在亥姆霍兹方程随机反源问题的启发下, 基于各类其他物理方程提出了相应的随机反源问题. [28] 针对纳米材料对环境干扰敏感的特性, 将环境噪声描述为一维空间上的白噪声, 提出了一维的欧拉伯努利方程的随机反源问题:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = F_k \delta(x - y) + g(x) + h(x)dW_x,$$

$$w(0) = w''(0) = w(L) = w''(L) = 0,$$

并利用单点受力的挠度 w 构造出环境噪音的统计特性并求解出材料的杨氏模量 $E(x)$ 和转动惯量 $I(x)$.

除此之外, 研究者们也将随机源的描述方式进行了推广. 在 [29] 中, 研究者们针对时间分数阶扩散方程

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x)h(t) + g(x)\dot{B}^H(t), & (x, t) \in D \times (0, T), \alpha \in (0, 1) \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial D \times [0, T], \\ u(x, 0) = 0, & x \in \overline{D} \end{cases}$$

将问题中的随机源表述为时间域上分数阶的布朗运动驱动的过程, 并证明了其正问题的适定性和在一定假设下反问题的唯一性, 在同样的随机源描述下, [30] 证明了分数阶波动方程, 即 $\alpha \in (1, 2)$ 时的随机反源问题正问题的适定性和反问题的不适定性, 并说明了其在白噪声情况下反问题的唯一性. [31] 将随机源定义为由广义的高斯随机过程驱动, 将其协方差算子表述为一个经典的伪微分算子. 并对这样随机性下的二维及三维的亥姆霍兹方程和弹性波方程进行了理论分析. 通过对随机波场的精确表达和微局域分析, 推导出了相应的线性积分方程, 将协方差算子的主符号与随机源的单一实现产生的散射数据的幅度联系起来, 并基于这种关系, 得到了亥姆霍兹和弹性波方程随机源主符号恢复的唯一性. [32] 则在同样的随机源描述下研究了双调和波动方程的正问题和反问题, 证明了其正问题在分布意义下的适定性和反问

题中, 随机源强度可以被频域上的平均波场幅度唯一确定.[33] 中则将随机源推广为分布意义下的复高斯向量场, 将随机源的协方差算子定义为具有复强度矩阵的伪微分算子, 并研究了这种随机驱动下的三维麦克斯韦方程组. 证明了该正问题分布意义下的适定性, 以及随机源的微相关强度矩阵可以被电场期望的高频极限唯一确定, 其强度矩阵也可被频域上平均电场幅度唯一确定.

1.4 本文的研究内容与组织结构

本文将针对目前随机反源问题尚且空白的部分, 基于已有的算法和理论基础, 分别对二维双调和方程的随机反源问题, 以及一维有界区域和高维无界区域下的分数阶扩散方程在空间随机源下的反问题进行研究. 本文的主要结构如下:

第 1 章为绪论部分. 首先我们介绍了本文研究内容的背景和意义, 并简单介绍了反源问题以及随机反源问题的定义和发展历史. 并归纳总结了随机源下反问题的现有理论结果和数值算法的发展现状, 最后概述了本文的主要研究内容和组织架构.

第 2 章介绍了本文所需要的预备知识. 主要包括问题适定性的定义、现有的正则化方法的介绍、以及随机源白噪声和有色噪声的定义和相关性质等.

第 3 章中, 针对有色噪声驱动下的二维双调和方程, 我们先说明了这一方程所代表的物理模型, 并得出了这一随机微分方程的正问题弱解的解析表达形式, 从理论上证明了该弱解的适定性和唯一性. 随后在求解反问题时, 我们将其转化为求解两个第一类 Fredholm 积分方程问题, 并且利用吉洪诺夫正则化将这一不适定的问题转化为可以求解的适定性问题. 在白噪音的条件下进行了数值实验, 给出了有效的数值算法. 该部分的研究成果已经发表在了 SCI 期刊 *Inverse Problems and Imaging* 上.

第 4 章中, 我们针对空间域上白噪声驱动下的一维分数阶扩散方程进行研究. 我们利用傅里叶变换将原问题转化为一个频域上的两点边值问题, 并证明了两者的等价性. 随后我们对频域上正问题的适定性和其反问题的不稳定性进行阐述并给出相应的估计和证明, 并且说明可以通过原问题终时刻的解的均值唯一确定频域上随机源的傅里叶变换模. 随后, 我们利用 PhaseLift 算法在数值上进行相位还原, 通过增加遮罩的方法唯一确定了原问题随机源的统计性质. 并给出了有效的算法和数值实例. 该部分的研究成果已经发表在了反问题领域知名期刊 *Inverse Problems* 上.

第 5 章将在上一章的基础上对多维情况下无边界的分数阶扩散方程的随机反源问题的理论进行研究和分析. 我们利用与上一章相同的方法, 将原问题通过傅里叶变换等价地转换为频域上的类亥姆霍兹方程 (Modified Helmholtz equation), 并且通过转换后的频域问题的格林函数得出其正问题解的适定性, 从而反推得出原问题解的适定性估计. 随即给出其扩散系数反演的表达关系式, 给出了反问题求解的存在

唯一性, 并对其反演的不稳定性给出了说明和阶数估计.

第 6 章对本文的主要内容和贡献进行了总结和回顾, 并对未来进一步的工作发展进行了展望. 虽然目前对随机反源问题的研究有了大量的成果, 但是对于许多更为一般情况下的随机源和与现实更为契合的方程, 该方法还有这很多欠缺. 同时由于随机问题的计算复杂程度相较于确定性问题大大增加, 有利于数值上计算随机反源问题的算法还有很大的提升空间.

2 预备知识

2.1 不适定性与正则化方法

2.1.1 适定与不适定问题

令 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$, 是一个连续算子, 其中 X 和 Y 均为赋范线性空间, 则大部分数学物理问题, 尤其是初值和边值问题, 都可以表现为如下形式:

$$\mathcal{A}(f) = g, \quad (2.1)$$

其中 $f \in X, g \in Y$. 对于这一方程, J.Hadamard 在 20 世纪初给出了关于其适定性的定义[34]:

定义 2.1: 若问题(2.1)满足下列条件, 则可以说它是适定的:

- (i) 对任意的 $g \in Y$, 存在 $f \in X$ 满足(2.1)(解的存在性).
- (ii) 对任意的 $g \in Y$, 满足方程(2.1)的解 $f \in X$ 是唯一的 (解的唯一性).
- (iii) 解在 g 存在扰动的情況下是稳定的, 即若 $\mathcal{A}f_* = g_*$ 且 $\mathcal{A}f = g$, 那么当 $\|g - g_*\| \rightarrow 0$ 时, 也有 $\|f - f_*\| \rightarrow 0$ (解的稳定性).

其中第 (iii) 条要求是因为在所有应用中, 数据都是测量值, 因此, 我们需要确保数据中的小误差只会导致解中的小误差. 而若上述条件中有任意一条不被满足, 那么我们就说问题(2.1)在 Hadamard 意义下是不适定的.

换言之, 我们也可以更为严格地给出适定性的数学定义[16]:

定义 2.2: 若方程(2.1)中, 算子 $\mathcal{A}$ 是双射的且存在连续的逆算子 $\mathcal{A}^{-1}: Y \rightarrow X$, 则方程(2.1)描述了一个 Hadamard 意义下适定的问题. 否则称问题(2.1)是不适定的.

注意到在定义中, 方程或算子的适定性是由算子 $\mathcal{A}$ 本身的属性连同解空间 X 和数据空间 Y 的大小以及其规定的范数决定的. 因此, 在某些情况下, 方程的不适定性可以通过改变空间大小及其范数来解决, 但是, 这种方法往往是不够的, 因为空间 X 和 Y , 以及它们的范数是由实际需要决定的, 特别是空间 Y 及其范数, 必须能够准确描述测量数据的空间和含义. 根据上述定义, 将不适定问题划分为以下三类:

- 如果 $\mathcal{A}$ 不是满射的, 则存在 $g \in Y$, 使得 X 中不存在满足方程(2.1)的解 f .(解的不存在性)

- 如果 $\mathcal{A}$ 不是单射的, 那么方程(2.1)则可能不止一个解存在.(解的不唯一性)
- 如果 $\mathcal{A}^{-1}$ 存在, 但是不连续, 那么方程(2.1)的解 f 则不连续依赖于数据 g .(解的不稳定性)

其中, 最后这类不适定问题是研究不适定问题的重点. 另外, 这三个条件一般来说不是完全独立的, 例如以下两种情况:

- 若 $\mathcal{A}$ 是线性算子, 那么当且仅当解的存在性和唯一性满足, 或等价地有 $\text{Null}(\mathcal{A}) = 0$ 且 $\text{Range}(\mathcal{A}) = Y$ 时, 方程(2.1)是适定的;
- 若 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子, 那么当且仅当解的存在性或唯一性任一性质满足时, 方程(2.1)是适定的.

定义 2.3: 一个有界线性算子 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 是紧的, 当且仅当其将任意有界集映成紧集. 即有界集的像的闭包是 Y 中的紧子集.

定理 2.1: 线性算子 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 是紧的, 当且仅当对于 X 中的任意有界序列 $(f_n), (\mathcal{A}f_n)$ 在 Y 中存在收敛的子序列.

定理 2.2: 若 X 是一个赋范空间且 Y 是巴拿赫空间, 令 $\mathcal{A}_n: X \rightarrow Y$ 是一族线性紧算子, 且依范数收敛到一个线性算子 $\mathcal{A}; X \rightarrow Y$, 即 $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. 则算子 $\mathcal{A}$ 是紧算子.

定理 2.3: 令 X, Y 和 Z 都是赋范空间, 且 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 和 $\mathcal{B}: Y \rightarrow Z$ 均为有界线性算子. 那么如果算子 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$ 之一是紧算子, 则复合算子 $\mathcal{B}\mathcal{A}: X \rightarrow Z$ 是紧的.

证明: 令 (f_n) 是 X 中的有界序列. 如果 $\mathcal{A}$ 是紧的, 则由定理 2.1, 存在一个子序列 $f_{n(k)}$, 使得 $\mathcal{A}f_{n(k)} \rightarrow g \in Y, k \rightarrow \infty$. 因为 $\mathcal{B}$ 是有界的, 因此也是连续的, 我们有 $\mathcal{B}(\mathcal{A}f_{n(k)}) \rightarrow \mathcal{B}g \in Z, k \rightarrow \infty$. 因此 $\mathcal{B}\mathcal{A}$ 是紧的. 而如果 $\mathcal{A}$ 是有界的且 $\mathcal{B}$ 是紧的, 那么因为有界算子将有界集映射为有界集, 序列 $(\mathcal{A}f_n)$ 在 Y 中是有界的, 因此, 存在一个子序列 $f_{n(k)}$ 使得 $(\mathcal{B}\mathcal{A})f_{n(k)} = \mathcal{B}(\mathcal{A}f_{n(k)}) \rightarrow h \in Z, k \rightarrow \infty$. 因此 $\mathcal{B}\mathcal{A}$ 是紧的.

定理 2.4: 恒等算子 $\mathcal{I}: X \rightarrow X$ 是紧的, 当且仅当 X 是有限维空间.

证明: 假设 $\mathcal{I}$ 是紧的且 X 为无穷维空间, 选择任意 $f_1 \in X$ 且 $\|f_1\| = 1$, 则 $U_1 := \text{span}\{f_1\}$ 是一个有限维的 X 空间上的闭子空间. 由 Riesz 引理我们知道存在 $f_2 \in X, \|f_2\| = 1$ 且满足 $\|f_2 - f_1\| \geq 1/2$. 考虑空间 $U_2 := \text{span}\{f_1, f_2\}$, 再由 Riesz

引理我们知道存在 $f_3 \in X, \|f_3\| = 1$ 且满足 $\|f_3 - f_1\| \geq 1/2, \|f_3 - f_2\| \geq 1/2$. 重复下去, 我们得到了序列 (f_n) , 满足 $\|f_n\| = 1$ 且 $\|f_n - f_m\| \geq 1/2, n \neq m$. 这说明 (f_n) 中不存在收敛子列, 从而与 $\mathcal{I}$ 是紧算子矛盾. 因此, 如果恒等算子是紧的, 其对应的空间 X 必然是有限维.

定理 2.5: 令 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空紧集且约当可测. 令 $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个连续函数. 则线性算子 $\mathcal{A} : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$:

$$(\mathcal{A}f)(x) := \int_{\Omega} K(x, y)f(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

被称为有连续核函数 K 的第一类积分算子, 且它是一个有界线性算子.

$$\|\mathcal{A}\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|dy.$$

定义 2.4: 我们称积分算子的核是弱奇性的, 当核函数 $K(x, y)$ 是适定的且对于任意 $x, y \in \Omega, x \neq y$ 都是连续的, 且存在常数 $M > 0$ 和 $\alpha \in (0, m]$, 使得对于任意 $x, y \in \Omega, x \neq y$ 我们有:

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha-m}.$$

定理 2.6: 带有连续核函数或者弱奇性核函数的积分算子是 $C(\Omega)$ 上的紧算子.

定理 2.7: 若 X 和 Y 均为赋范空间且 $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ 为第一类积分算子(2.2), 则当 X 不是有限维空间时, 方程 $\mathcal{A}f = g$ 是不适定的.

证明: 由定理 2.6 可得积分算子 $\mathcal{A}$ 是一个有界线性紧算子, 定义算子 $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I} : X \rightarrow X$ 是恒等算子, 由定理 2.4 可得当 X 不是有限维空间时, 算子 $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ 不是紧的, 从而由定理 2.3 可知算子 $\mathcal{A}^{-1}$ 是无界算子, 因此也是不连续的. 从而得证算子 $\mathcal{A}$ 不存在连续的逆算子, 从而得证方程 $\mathcal{A}f = g$ 是不适定的.

因为我们知道不适定性会带来解对输入数据依赖性的缺失, 而我们可以将方程表达的数值近似看做为带有扰动数据的情况, 所以第一类积分方程的不适定性会对其数值计算产生影响. 在这种情况下利用常规的数值离散算法求解不适定性问题将不再适用. 因为算子 $\mathcal{A}$ 不存在有界逆意味着其有限维逼近的条件数会随着逼近精度的增长而增长. 从而使得增加算子 $\mathcal{A}$ 的逼近精度, 反而会导致方程 $\mathcal{A}f = g$ 的近似解变得越来越失去意义.

从数值离散的角度上来看, 设方程(2.1)离散化后的数据模型为

$$K\mathbf{f}_{\text{true}} + \mathbf{e} = \mathbf{g}, \quad \|\mathbf{e}\| > 0, \quad (2.3)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示的是欧几里得范数, $\mathbf{e}$ 是一个 n 维向量, 代表数据误差, K 是一个 $n \times m$ 矩阵, 代表离散后的算子 $\mathcal{A}$, $\mathbf{f}_{\text{true}} \in \mathbb{R}^m$ 真实解离散后得到的向量. 在这里我们设 K 是一个可逆, 实值的矩阵, 则对 K 有奇异值分解 (SVD),

$$K = U \text{diag}(s_i) V^T,$$

其中奇异值 s_i 是严格正的递减序列, V 的列向量 $\mathbf{v}_i$ 称为右奇异向量, U 的列向量 $\mathbf{u}_j$ 称为左奇异向量, 且满足

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j &= \delta_{ij}, & \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j &= \delta_{ij}, \\ K\mathbf{v}_i &= s_i \mathbf{u}_i, & K^T \mathbf{u}_i &= s_i \mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

这里 δ_{ij} 是克罗内克 δ 函数, 即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

且 U 和 V 皆为酉矩阵, 即 $U^T = U^{-1}$, $V^T = V^{-1}$. 因此我们有以下关系:

$$K^{-1}\mathbf{g} = V \text{diag}(s_i^{-1}) U^T \mathbf{g} = \mathbf{f}_{\text{true}} + \sum_{i=1}^n s_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}) \mathbf{v}_i. \quad (2.4)$$

因此, 从数值角度来看, 导致求解结果不稳定的原因在于过小的奇异值. 从而, 从数值上处理不适定问题的出发点即在于对奇异值进行进一步的处理.

2.1.2 正则化方法

用于求不适定性问题稳定近似解的方法称为正则化方法. 在本节的介绍中, 我们将假设线性算子 $\mathcal{A}$ 是一一对应的, 这是因为只要我们合理地规定解空间 X , 我们总可以让一个线性方程的解唯一存在. 设方程 $\mathcal{A}f = g$ 的右端项数据输入为扰动后的 g^δ , 其误差为

$$\|g^\delta - g\| \leq \delta.$$

当 $f \in \text{range}(\mathcal{A})$ 时存在唯一解 f 满足 $\mathcal{A}f = g$. 而对于扰动后的右端项, 一般来说我们无法肯定 $f^\delta \in \mathcal{A}(X)$. 而正则化所期望达到的是能够通过扰动数据 g^δ 构建一个合理的近似解 f^δ , 并且近似解可以连续依赖于实际数据 g^δ . 理论上讲, 即为找到一个近似的有界线性算子 $\mathcal{R}: Y \rightarrow X$ 用以逼近无界的逆算子 $\mathcal{A}^{-1}: X \rightarrow Y$.

定义 2.5: 令 X 和 Y 为赋范空间, $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 是一个一一对应的有界线性算子. 正则化方法一般是一族有界线性算子 $\mathcal{R}_\alpha: Y \rightarrow X, \alpha > 0$, 对任意 $f \in X$ 满足下列逐点收敛

$$\mathcal{R}_\alpha \mathcal{A}f = f, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

参数 α 被称为正则化参数.

定义 2.6: 正则化方法 $\mathcal{R}_\alpha, \alpha > 0$ 的选择策略, 即选择依赖于误差 δ 的正则化参数 $\alpha = \alpha(\delta)$ 策略是正则的, 如果对任意 $g \in \mathcal{A}(X)$ 和所有满足 $\|g^\delta - g\| \leq \delta$ 的 $g^\delta \in Y$ 有

$$\mathcal{R}_{\alpha(\delta)} g^\delta \rightarrow \mathcal{A}^{-1}g, \quad \delta \rightarrow 0.$$

接下来我们重点叙述之后章节利用到的吉洪诺夫正则化方法, 下文中出现的赋范空间均为希尔伯特空间.

定理 2.8: 令 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 是一个一一对应的线性紧算子, 那么对每一个的 $\alpha > 0$, 算子 $\alpha\mathcal{I} + \mathcal{A}^*\mathcal{A}: X \rightarrow X$ 存在有界逆且

$$\mathcal{R}_\alpha := (\alpha\mathcal{I} + \mathcal{A}^*\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^*$$

是一个 $\|\mathcal{R}_\alpha\| \leq \frac{1}{2\alpha}$ 的正则化方法.

定理 2.9: 令 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 是一个有界线性算子且有 $\alpha > 0$. 那么对任意的 $g \in Y$, 唯一存在一个 $f_\alpha \in X$ 使得

$$\|\mathcal{A}f_\alpha - g\|^2 + \alpha\|f_\alpha\|^2 = \inf_{f \in X} \{\|\mathcal{A}f - g\|^2 + \alpha\|f\|^2\}. \quad (2.5)$$

最小值 f_α 是以下方程的唯一解

$$(\alpha\mathcal{I} + \mathcal{A}^*\mathcal{A})f_\alpha = \mathcal{A}^*g \quad (2.6)$$

且该解连续依赖于 g .

证明: 对于任意 $f \in X$ 都有下列等式成立:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}f - g\|^2 + \alpha\|f\|^2 &= \|\mathcal{A}f_\alpha - g\|^2 + \alpha\|f_\alpha\|^2 \\ &\quad + 2\Re(f - f_\alpha, \alpha f_\alpha + \mathcal{A}^*(\mathcal{A}f_\alpha - g)) \\ &\quad + \|\mathcal{A}(f - f_\alpha)\|^2 + \alpha\|f - f_\alpha\|^2, \end{aligned}$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 是希尔伯特空间的内积, $\Re(\cdot)$ 是取实部. 因此可得 f_α 满足式(2.6)是最小化吉洪诺夫泛函(2.5)的充要条件.

考虑算子 $\mathcal{T}: X \rightarrow X$ 满足 $\mathcal{T} := \alpha\mathcal{I} + \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. 对于任意 $f \in X$ 有以下等式

$$\alpha\|f\|^2 \leq \alpha\|f\|^2 + \|\mathcal{A}f\|^2 = \Re(\mathcal{T}f, f).$$

因此算子 $\mathcal{T}$ 是严格强制的, 根据 Lax-Milgram 定理有, 我们可知算子 $\mathcal{T}$ 存在有界逆算子 $\mathcal{T}^{-1}: X \rightarrow X$.

定义 2.7: 问题(2.1)的经典吉洪诺夫泛函 $J(f)$ 有以下形式[35]

$$J(f) = \|\mathcal{A}f - g\|^2 + \alpha\|f\|^2.$$

定义 2.8: 算子 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 被称作是关于 $f \in \mathcal{H}_1$ Fréchet 可导的, 当且仅当存在算子 $\mathcal{A}' \in \mathcal{L}(X, Y)$, 即从 X 映射到 Y 的线性算子, 满足

$$\mathcal{A}(f+h) = \mathcal{A}(f) + \mathcal{A}'(f)h + o(\|h\|_X), \quad \|h\|_X \rightarrow 0.$$

则 $\mathcal{A}'$ 称作是 $\mathcal{A}$ 对于 f Fréchet 导数. 更为高阶的 Fréchet 导数则递归地可以定义 $\mathcal{A}''(f) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$, 满足

$$\mathcal{A}'(f+k) = \mathcal{A}'(f) + \mathcal{A}''(f)k + o(\|k\|_X)$$

定义 2.9: 若 $J: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ 关于 f 是 Fréchet 可导的, 由 Riesz 表示定理, 存在 J 的梯度 $\text{grad}J(f) \in \mathcal{H}$ 满足

$$J'(f)h = (\text{grad}J(f), h).$$

定理 2.10: 方程(2.6)与吉洪诺夫泛函满足以下关系:

$$\text{grad}J(f) = (\alpha\mathcal{I} + \mathcal{A}^*\mathcal{A})f - \mathcal{A}^*g$$

求解方程(2.6)等价于求解吉洪诺夫泛函梯度为零时的 f .

一般在经典吉洪诺夫正则化中, 我们会将积分算子定义为一个从 L^2 空间到 L^2 空间的映射, 即 $\mathcal{A}: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. 这时吉洪诺夫泛函则有以下形式:

$$\|\mathcal{A}f - g\|_{L^2}^2 + \alpha\|f\|_{L^2}^2, \quad (2.7)$$

其中第一项被称作数据差异函数 (data discrepancy functional), 第二项被称作罚函数 (penalty functional). 一般我们将数据空间 Y 选取为 L^2 空间是因为我们需要充

分测量数据中的误差. 但是我们在考虑解空间 X 的时候可以有更多的选择, 尤其是我们在对解空间存在一定的先验估计的时候. 1963 年, 吉洪诺夫就曾经提出要将解的导数合并到罚函数中来抑制近似解中高度震荡的部分 [36], 即将式 (2.7) 更改为

$$\|\mathcal{A}f - g\|_{L^2}^2 + \alpha \|f\|_{H^1}^2 \quad (2.8)$$

也就是将解空间定义为 $H^1(\Omega)$ 空间, 将罚函数取为 H^1 空间的范数平方. 除此之外, 针对数据差异函数, 在最为常用的数据与结果差的 L^2 模之外, 还有 Kullback-Leibler 差:

$$(\mathcal{A}f, \log(\mathcal{A}f/g)).$$

等等, 在此不做过多介绍.

而从数值化角度而言, 如上一节的式 (2.4) 所表示的, 离散化后的不适定方程 $K\mathbf{f} = \mathbf{g}$ 的正则化求解, 其关键在于修正 K 的那些过小的奇异值 s_i , 例如设定一个过滤函数 $w_\alpha(s_i^2)$, 使得当 $s \rightarrow 0$ 时有 $w_\alpha(s^2)s^{-1} \rightarrow 0$. 这样可以将 K 中那些过于小的奇异值“过滤”掉, 从而得到近似的正则化解表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\alpha &= V \text{diag}\left(\frac{w_\alpha(s_i^2)}{s_i}\right) U^T \mathbf{g} \\ &= \sum_{s_i > 0} \frac{w_\alpha(s_i^2) \hat{g}_i}{s_i} \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (2.9)$$

且我们有定义 2.6 中在正则化策略算子 $\mathcal{R}_\alpha$ 的线性过滤表示 R_α 满足

$$R_\alpha \mathbf{g} = \sum_{s_i > 0} \frac{w_\alpha(s_i^2) \hat{g}_i}{s_i} \mathbf{v}_i.$$

其中 $\hat{g}_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{g}$. 对于经典的吉洪诺夫正则化方法来说, 其相应的过滤函数为

$$w_\alpha(s^2) = \frac{s^2}{s^2 + \alpha^2}. \quad (2.10)$$

且相应的正则近似可以表示成

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\alpha &= \sum_{s_i > 0} \frac{s_i \hat{g}_i}{s_i^2 + \alpha^2} \mathbf{v}_i \\ &= (K^T K + \alpha I)^{-1} K^T \mathbf{g}. \end{aligned}$$

这也与定理 2.9 相符.

在正则化方法中, 对于正则化参数 α 的选取至关重要. 过小的参数会使得重构结果因为噪声的放大而存在高度震荡, 而过大的参数则会导致计算结果过于平滑而失去了本身的意义. 理想状态下, 参数 α 的选取应该使得正则化解 f_α 尽可能地接近

真实的 f , 即最小化 $e_\alpha = f_\alpha - f$. 显然因为真实解未知, 我们无法通过直接计算来完成这一点. 因此我们需要制定一些策略来选定正则化参数.

关于选取策略有许多种方法, 例如无偏风险预测估计法 (UPRE), 广义交叉验证法 (GCV) 等等, 在这里我们简单介绍后续章节中使用到的 L 曲线法 (L-Curve), 这一方法由 Hansen 在 1992 年提出[37], 而有关其他方法的详细说明请参考[38].

令 $\mathbf{f}_\alpha$ 是正则化解, $\mathbf{r}_\alpha = K\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{g}$ 是正则化残差, 定义

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= \log R(\alpha), & R(\alpha) &= \|\mathbf{r}_\alpha\|^2, \\ Y(\alpha) &= \log S(\alpha), & S(\alpha) &= \|\mathbf{f}_\alpha\|^2. \end{aligned}$$

而 L 曲线则是一条包含了所有的点 $(X(\alpha), Y(\alpha))$ 的一条连续曲线, 其中 $\alpha \in [0, \infty)$. 这条曲线一般来说呈一个 L 型, 而有关正则化参数的选取, 则是需要找到这一 L 型曲线拐角处相对应的参数值 α . 我们假设 $X(\alpha)$ 和 $Y(\alpha)$ 关于 α 是光滑的, 尤其是二阶可导的, 那么找到拐点相应的参数值便等价于最大化曲率方程

$$\kappa(\alpha) = \frac{X''(\alpha)Y'(\alpha) - X'(\alpha)Y''(\alpha)}{(X'(\alpha) + Y'(\alpha))^{3/2}}.$$

2.2 随机源的定义

本节将介绍一些与本文工作相关的随机微分方程的一些基本概念和理论结果, 更为具体详细的内容可以参考[39]和[40].

2.2.1 随机过程

定义 2.10: 随机过程 X 是一族定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的依赖于 t 的随机变量的集合 $\{X(t, \omega)\}$, 其中 $t \in T$.

在这里, 参数空间 T 一般指 $[0, \infty)$, 但是也可以是一个区间 $[a, b]$, 非负整数的集合, 或者是 $n \geq 1$ 时 $\mathbb{R}^n$ 上的一些子集. 对于固定的 t , 其观察数值可以用一个随机变量来描述, 一般写作 X_t 或 $X(t)$, 概率分布为 $P(X(t) \geq x)$. 对于固定的 ω , $X(t)$ 是该随机过程的一个单一实现 (single realization) 或称为单一路径 (single path), 任何一条单一路径都是变量 t 的函数 $x_t = x(t), t \geq 0$.

定义 2.11: 若一族随机变量中任意有限个元素的联合分布都是高斯分布, 那么这个随机变量的集合被称为高斯过程 (Gaussian process).

定义 2.12: 布朗运动 (Brownian motion) 指的是微小粒子或者颗粒在流体中做的无规则运动, 是一种特殊的随机过程, 也被称为维纳过程 (Wiener process), 若一个随机过程 $\{B(t)\}$ 被称为布朗运动, 若它满足以下三个条件:

i (增量独立) 对所有的 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$, 其增量

$$B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_m) - B(t_{m-1})$$

相互独立.

ii (正态固定增量) $B(t) - B(s)$ 服从均值为零, 方差为 $t - s$ 的正态分布.

iii (路径连续) $B(t), t > 0$ 是对于 t 的连续函数.

定理 2.11: 布朗运动是一类满足均值方程为零, 协方差方程为 $\min(t, s)$ 的高斯过程. 且如果一个高斯过程满足均值方程为零, 协方差方程为 $\min(t, s)$, 那么它是一个布朗运动.

$$\gamma(t, s) = \text{Cov}(B(t), B(s)) = EB(t)B(s) = \min(t, s)$$

证明: 因为布朗运动的均值为零, 则其协方差方程满足

$$\begin{aligned} \gamma(t, s) &= \text{Cov}(B(t), B(s)) = E(X(t) - EX(t))(X(s) - EX(s)) \\ &= E(X(t)X(s)) - EX(t)EX(s) \\ &= E(B(t)B(s)). \end{aligned}$$

若 $t < s$, 则 $B(s) = B(t) + B(s) - B(t)$, 因此有

$$E(B(t)B(s)) = EB^2(t) + E(B(t)(B(s) - B(t))) = EB^2(t) = t,$$

同理若 $t > s$, 有 $E(B(t)B(s)) = s$, 因此得到结论

$$E(B(t)B(s)) = \min(t, s).$$

为了证明其充分性, 我们令 $X(t)$ 是一个高斯过程且有 $s \geq 0$, 因此 $X(t), X(t+s)$ 的联合分布是一个二元正态分布, 且其均值为零. 因此向量 $(X(t), X(t+s) - X(t))$ 同样也是服从二元正态分布的. 因为满足协方差方程 $\text{Cov}(X(t), X(t+s)) = \min(t, s)$, 所以有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(t), X(t+s) - X(t)) &= \text{Cov}(X(t), X(t+s)) - \text{Cov}(X(t), X(t)) \\ &= t - t = 0, \end{aligned}$$

从而随机变量 $X(t)$ 和 $X(t+s) - X(t)$ 是不相关的, 由多元正态分布的性质可知其为相互独立的. 因此增量 $X(t+s) - X(t)$ 独立于 $X(t)$ 且服从分布 $N(0, s)$, 因此其为一个布朗运动.

基本上布朗运动的每一条实现路径 $B(t), 0 \leq t \leq T$ 都有以下三个性质

- i 是 t 的连续函数,
- ii 在任意区间内都不单调,
- iii 在任意点都不可导, 即对任意 t_0 , 维纳过程的每一条实现路径 $B(t)$ 几乎处处满足

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B(t) - B(t_0)}{t - t_0} \right| = \infty.$$

2.2.2 白噪声

首先我们给出布朗片 (Brownian sheet) 的定义. 本质上, 布朗片就是定义在高维测度空间 $(\mathbb{R}_+^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^d), \mu)$ 上的布朗运动, 其中 $d \in \mathbb{N}, \mathbb{R}_+^d = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, d\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^d)$ 是 $\mathbb{R}_+^d$ 上的博雷尔 σ 代数, μ 是勒贝格测度. 若 $x \in \mathbb{R}_+^d$, 则 $(0, x]$ 代表 $(0, x_1] \times (0, x_2] \times \dots \times (0, x_d]$.

定义 2.13: 定义在 $\mathbb{R}_+^d$ 上的布朗片是一个随机过程 $\{\widetilde{W}_x : x \in \mathbb{R}_+^d\}$, 其中 $\widetilde{W}_x = \widetilde{W}\{(0, x]\}$. $\widetilde{W}$ 是一个随机集合函数, 满足:

- i 对任意 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^d)$, $\widetilde{W}(A)$ 是一个服从正态分布 $N(0, \mu(A))$ 的随机变量;
- ii 对任意 $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^d)$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $\widetilde{W}(A)$ 和 $\widetilde{W}(B)$ 相互独立且有 $\widetilde{W}(A \cup B) = \widetilde{W}(A) + \widetilde{W}(B)$.

从定义 2.13 中我们可以得到

$$\mathbf{E}(\widetilde{W}(A)\widetilde{W}(B)) = \mu(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^d),$$

类似于定理 2.11, 我们有布朗片的协方差方程

$$\mathbf{Cov}(\widetilde{W}_x, \widetilde{W}_y) = \mathbf{E}(\widetilde{W}_x \widetilde{W}_y) = x \wedge y := \prod_{j=1}^d (x_j \wedge y_j) \quad (2.11)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d, y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}_+^d$, 且 $x_j \wedge y_j = \min\{x_j, y_j\}$.

另外, 我们可以通过 2^d 个相互独立的定义在 $\mathbb{R}_+^d$ 上的布朗片来推广定义在全空间 $\mathbb{R}^d$ 上的布朗片. 定义一个多重指标 $t = (t_1, t_2, \dots, t_d)$ 满足 $t_j = \{1, -1\}, j = 1, 2, \dots, d$. 若我们有 2^d 个相互独立的 $\mathbb{R}_+^d$ 上的布朗片 $\{\widetilde{W}^t\}$, 则对任意

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

定义布朗片

$$\widetilde{W}_x := \widetilde{W}_{\check{x}}^{t(x)},$$

其中 $\check{x} = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|)$ 且 $t(x) = \text{sgn}(x_1), \text{sgn}(x_2), \dots, \text{sgn}(x_d)$. 符号函数在 $x_j \geq 0$ 时有 $\text{sgn}(x_j) = 1$, 否则 $\text{sgn}(x_j) = -1$.

白噪音可以看做是布朗片的导数. 但相同于布朗运动, 布朗片 $\widetilde{W}_x$ 在每一条实现路径上都是几乎处处不可导的, 但是其导数可以在施瓦茨分布意义下存在, 我们定义

$$\dot{\widetilde{W}}_x = \frac{\partial^d \widetilde{W}_x}{\partial x_1 \dots \partial x_d}.$$

设 $\phi(x)$ 是在 $\mathbb{R}^d$ 上紧支的平方可积的测试函数, 那么 $\dot{\widetilde{W}}_x$ 是分布

$$\dot{\widetilde{W}}_x(\phi) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} dx.$$

同样我们也可以定义随机积分

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\widetilde{W}_x = (-1)^d \widetilde{W}_x \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} dx. \quad (2.12)$$

定理 2.12: 若 $\phi(x)$ 是一个在 $\mathbb{R}^d$ 上紧支的测试函数, 则有下列等式满足:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\widetilde{W}_x \right) &= 0, \\ \mathbf{E} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\widetilde{W}_x \right|^2 \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

这也是著名的 Itô 等距公式.

证明: 由随机积分的定义(2.12)我们知道

$$\mathbf{E} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\widetilde{W}_x \right) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \mathbf{E}(\widetilde{W}_x) dx = 0.$$

再利用(2.11), 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\widetilde{W}_x \right|^2 \right) &= \mathbf{E} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{W}_x \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} dx \times \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{W}_y \frac{\partial^d \bar{\phi}(y)}{\partial y_1 \dots \partial y_d} dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \frac{\partial^d \bar{\phi}(y)}{\partial y_1 \dots \partial y_d} \mathbf{E}(\widetilde{W}_x \widetilde{W}_y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \bar{\phi}(y)}{\partial y_1 \dots \partial y_d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} (x \wedge y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

我们先利用归纳法证明下列等式成立,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} (x \wedge y) dx = (-1)^d \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_d} \phi(x) dx_d \dots dx_1, \quad (2.13)$$

对于 $d = 1$ 来说, 通过分部积分我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1} (x_1 \wedge y_1) dx_1 &= \int_{-\infty}^{y_1} \frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1} x_1 dx_1 + \int_{y_1}^{\infty} \frac{\partial \phi(x_1)}{\partial x_1} y_1 dx_1 \\ &= x_1 \phi(x_1) \Big|_{-\infty}^{y_1} - \int_{-\infty}^{y_1} \phi(x_1) dx_1 + y_1 \phi(x_1) \Big|_{y_1}^{\infty} \\ &= - \int_{-\infty}^{y_1} \phi(x_1) dx_1. \end{aligned}$$

假设对于 $d = n \in \mathbb{N}$ 都有式(2.13)成立, 即

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} (x \wedge y) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_d} \phi(x) dx_d \dots dx_1$$

那么对于 $d = n + 1$ 来说, 令 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 且有 $x_{n+1}, y_{n+1} \in \mathbb{R}$. 设 $\partial x = \partial x_1 \dots \partial x_n$, 利用分部积分我们有:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{\partial^{n+1} \phi(x, x_{n+1})}{\partial x \partial x_{n+1}} (x \wedge y) (x_{n+1} \wedge y_{n+1}) dx dx_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{y_{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \left(\frac{\partial^n \phi(x, x_{n+1})}{\partial x} \right) (x \wedge y) y_{n+1} dy_{n+1} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{y_{n+1}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \left(\frac{\partial^n \phi(x, x_{n+1})}{\partial x} \right) (x \wedge y) x_{n+1} dy_{n+1} dx \\ &= y_{n+1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^n \phi(x, y_{n+1})}{\partial x} (x \wedge y) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{y_{n+1}} \frac{\partial^n \phi(x, x_{n+1})}{\partial x} (x \wedge y) dx_{n+1} dx \\ &\quad - y_{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^n \phi(x, y_{n+1})}{\partial x} (x \wedge y) dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_n} \int_{-\infty}^{y_{n+1}} \phi(x, x_{n+1}) dx_{n+1} dx \\ &= (-1)^d \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_d} \phi(x_1, \dots, x_d) dx_d \dots dx_1. \end{aligned}$$

从而得证等式(2.13).

结合上述估计, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\widetilde{W}_x \right|^2 \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d \bar{\phi}(y)}{\partial y_1 \dots \partial y_d} \left(\int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_d} \phi(x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

从而得证定理.

2.2.3 有色噪声

我们定义白噪声 $\dot{\widetilde{W}}_x$ 是布朗片分布意义下的导数, 且我们知道布朗片类似于布朗运动, 因为交集为空集的布朗片不相关, 从而有协方差方程

$$\mathbf{Cov}(\widetilde{W}_x, \widetilde{W}_y) = \mathbf{E}(\widetilde{W}_x \widetilde{W}_y) = x \wedge y := \prod_{j=1}^d (x_j \wedge y_j),$$

但在有色噪声中, 我们定义不同区间下的布朗片是存在相关性的, 即令 Q 是一个非负且对称的迹类线性算子且可以被核函数 $k(x, y)$ 描述:

$$(Qf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y) f(y) dy, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

有色噪声是一类随机过程 $W(x)$, 其分布意义下的导数表示为 $\dot{W}_x$, 可以通过下列等式描述:

$$\dot{W}_x = Q \dot{\widetilde{W}}_x,$$

其中 $\dot{\widetilde{W}}_x$ 是白噪声. 若线性算子 Q 与微分算子 $\partial^d / \partial x_1 \dots \partial x_d$ 可交换, 则随机过程 $W_x = Q \widetilde{W}_x$, 且 $\widetilde{W}_x$ 是标准的 d 个参数的布朗片.

对任意 $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $W(A)$ 满足

$$W(A) \sim N\left(0, \int_A \int_A c(x, y) dx dy\right)$$

且有

$$\mathbf{E}(W(A)W(B)) = \int_A \int_B c(x, y) dx dy,$$

其中 c 是有色噪声 $\dot{W}_x$ 的相关函数且满足:

$$\begin{aligned} c(x, y) &:= \mathbf{E}(\dot{W}_x \dot{W}_y) = \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, z) d\widetilde{W}_z \times \int_{\mathbb{R}^d} k(y, z) d\widetilde{W}_z\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k(x, z) k(y, z) dz. \end{aligned}$$

一般来说, 我们假设相关函数 $c(x, y)$ 对于某个 $q_0 \geq 1$ 满足 $c \in L_{\text{loc}}^{q_0}(\mathbb{R}^d)$. 且随着 $|x - y| \rightarrow \infty$ 有 $c(x, y) \rightarrow 0$, 体现了不同分量的相关性随着分量间隔的增大衰减为零这一特性.

在实际中, 有三类最为常用的相关函数 c , 且

1. Delta 核: 若 $c(x) = \delta(x)$, 则这时 $q_0 = 1$, 算子 Q 为恒等算子, 且这时有色噪声退化为白噪声.

2. Riesz 核: 若 $c(x) = |x|^{-\nu}, 0 < \nu < d$, 则对于任意有界紧区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 和满足 $\bar{\Omega} \subset B_\rho$ 的 $\rho > 0$, 我们可以证得 $q_0 \in [1, \frac{d}{\nu})$, 因为当 $d - 1 - \nu q_0 > -1$ 时有

$$\|c\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{q_0} \leq \int_{B_\rho(0)} |x|^{-\nu q_0} dx \leq \int_0^\rho r^{d-1} r^{-\nu q_0} dr \leq \infty.$$

即 $q_0 \in [1, \frac{d}{\nu})$.

可以看到 Riesz 核代表的相关函数的衰减速度服从幂次衰减, 即说明这一噪声具备长记忆性.

3. 热核: 若 $c(x) = e^{-|x|^2}$. 显然这时有 $q_0 \in [1, \infty]$.

热核的相关函数的衰减速度是指数衰减, 因此我们也称这类噪声是具有短期相关性的.

若 $\phi(x)$ 是一个复值的平方可积的测试函数, 且在 $\mathbb{R}^d$ 上紧支, 那么 $\dot{W}_x$ 在分布意义下成立且满足下列等式

$$\dot{W}_x(\phi) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} W_x \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} dx,$$

也可以等价地表达为

$$\dot{W}_x(\phi) = \widetilde{W}_x(Q\phi) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{W}_x \frac{\partial^d (Q\phi)(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} dx.$$

类似于白噪声, 我们也可以定义彩色噪声下的随机积分:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dW_x = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} W_x \frac{\partial^d \phi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} dx$$

或等价地表述为

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dW_x = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{W}_x \frac{\partial^d (Q\phi)(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} dx. \quad (2.14)$$

定理 2.13: 若 $\phi(x)$ 是一个在 $\mathbb{R}^d$ 上紧支的测试函数, 则有下列等式满足:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dW_x \right) &= 0, \\ \mathbf{E} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dW_x \right|^2 \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) c(x, y) \bar{\phi}(y) dx dy. \end{aligned}$$

证明: 通过式(2.14), 我们可以直接得到

$$\mathbf{E} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dW_x \right) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d (Q\phi)(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \mathbf{E}(\widetilde{W}_x) dx = 0.$$

而利用式(2.12)和(2.14)我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\left|\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dW_x\right|^2\right) &= \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{W}_x \frac{\partial^d(Q\phi)(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} dx \times \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{W}_y \frac{\partial^d(Q\bar{\phi})(y)}{\partial y_1 \dots \partial y_d} dy\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d(Q\phi)(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \frac{\partial^d(Q\bar{\phi})(y)}{\partial y_1 \dots \partial y_d} \mathbf{E}(\widetilde{W}_x \widetilde{W}_y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^d(Q\phi)(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \frac{\partial^d(Q\bar{\phi})(y)}{\partial y_1 \dots \partial y_d} (x \wedge y) dx dy.
\end{aligned}$$

利用对等式(2.13)相同的证明方法, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\left|\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dW_x\right|^2\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} (Q\phi)(x) (Q\bar{\phi})(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, y) \phi(y) dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, z) \bar{\phi}(z) dz\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) \bar{\phi}(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} k(x, y) k(x, z) dx\right) dy dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) \bar{\phi}(z) c(y, z) dy dz,
\end{aligned}$$

从而定理得证.

3 二维双调和方程的随机反源问题

3.1 引言

对弹性材料的力学性质的定性与定量一直是工业各界的研究热点之一. 从物理方法上来看, 研究方法主要分为静力试验, 如拉伸、压缩、蠕变、扭转和应力松弛等, 以及动力实验, 如共振、冲击等. 而从数学层面上来看, 定量分析弹性材料的力学性质, 更多是将材料形变过程转变为数学模型并通过一系列偏微分方程(组)进行描述, 并通过测量得到的数据确定方程(组)中的系数. 因而这一过程也可以看作是数学物理反问题中的反演系数问题. 例如对于一维情形来说, 固定支撑下的静态弹性梁的形变就可以简化为经典的欧拉伯努利梁方程.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right) &= F(x), \\ w(0) = w''(0) = w(L) = w''(L) &= 0, \end{aligned}$$

其中 w 代表弹性梁的形变挠度, $E(x)I(x)$ 是材料的强度, 即为杨氏模量和转动惯量的乘积, L 是梁的长度, 而 $f(x)$ 则为分布在梁上的负载力.

而在静力实验的过程中往往会存在许多不确定因素, 如仪器的系统误差, 或环境的噪声等, 从而导致对尺度较小的材料, 如纳米级厚度的弹性材料, 的性质测定产生错误估计. 对于这一问题, 在针对一维弹性纳米梁的力学性质定量分析的研究中, [41] 和 [42] 从统计学的角度出发, 对材料的形变数据进行统计分析, 从而排除噪声的影响. 而 Bao 和 Xu[28] 则将这一系列的不确定因素归纳为一项简单的由 Winner 过程驱动的随机源, 并将负载力表达为以下形式

$$f(x) = F_k \delta(x - y) + g(x) + h(x) \dot{W}_x,$$

其中 $F_k \delta(x - y)$ 是施加在 y 点上, 大小为 F_k 的外加点力, $g(x)$ 和 $f(x)$ 是在 $[0, L]$ 上紧支的确定函数, $\dot{W}_x$ 是一维的空间白噪声.

利用这样的随机模型, 作者能够通过重复试验得到的数据重构随机源. 并在 [43] 中利用这种方法去除实验中的不确定性, 得到更为精确的力学性质的定量计算结果. 针对更多这类求解反问题的总结和归纳请参照 [44].

在本章节中, 我们将沿用这一研究方法, 把已有的一维结果拓展到二维弹性薄板上, 并将上述一维情形下的随机源拓展到二维情形下.

3.2 薄板理论的介绍

3.2.1 薄板的定义、模型、及应力与应变分析

本节主要简单介绍薄板受力弯曲的静力分析模型, 对于更为详细的力学分析和模型推导请参见[45]和[46]. 我们这里定义的薄板是指其高, 或厚度 h 远小于其截面的各维度尺寸的弹性柱体. 我们这里定义中性面为平分薄板厚度的平面, 定义薄板的边界为中性面与薄板相交的曲线. 因此, 如图 3.1 所示, 薄板的边界可以是一条封闭的平面曲线、多边形, 或者由一系列曲线和线段组成. 为了简要阐述, 我们在本章中假定中性面为一个单连通区域, 即薄板不存在任何孔洞.

与此同时, 薄板受到垂直于中性面的外力弯曲形变, 且边界受到外界支撑(支撑方式分为固定支撑、简支、无支撑、弹性支撑等多种). 我们可以简单将作用在薄板上的力大致分为以下几类:

1. 方向为 z 轴, 分布在整体或部分中性面上外力, 其密度负载为 $f(x, y)$.
2. 作用在平面内部的点 (x_i, y_i) 上, 法向分布的集中外力 $F^{(i)}$.
3. 作用在平面内部的点 (x_i, y_i) 上的力矩 $\mathbf{M}^{(i)} = (M_x^{(i)}, M_y^{(i)})$.
4. 横向作用在边界上的剪力 $V_n(s)$ 以及弯矩 $M_n(s)$.
5. 作用在角 k 上的集中力 R_k .

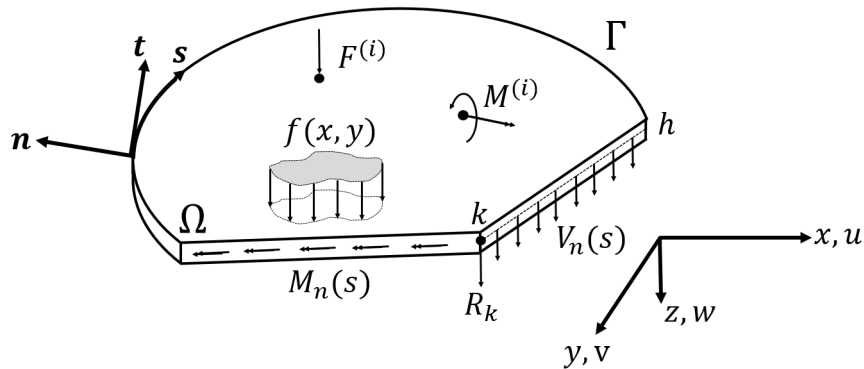


图 3.1 薄板构造及受力示意图

在物体内部的任意一点, 其受到的应力 σ 都可以用无限小的正六面体的面上的应力分量 σ_{ij} 来表示, 在每一个面上都受到来自三个方向的应力, 即一个正应力分量和两个剪应力分量. 一般我们规定应力下标中第一个字母代表应力的作用面, 第二

个字母代表应力的作用方向. 在平衡状态下, 对正六面体的中心轴取矩便可得到关系式:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$$

因此, 在物体内的一点总共有六个应力分量:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}).$$

对应这六个分量, 在物体内的任意一点受到应力而产生的应变可以写出六个应变分量:

$$(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}).$$

而对于小挠度变形的薄板问题来说, 这一三维的固体问题将简化为一个二维问题来处理. 因而我们接下来介绍薄板理论的几条假设:

1. 薄板的材料线性弹性, 均质且各向同性的.
2. 因为薄板中 z 方向上的厚度与 x 和 y 方向上的几何尺寸相比非常小.
3. 原始状态下垂直于中性面的线段在发生形变之后仍垂直于变形后的中性面, 且板的厚度不发生改变, 即板 z 方向上的应变 $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$.
4. 垂直于中性面的应力远小于中性面另外两个方向上的应力分量, 故可以看做外力只作用在 xy 平面内, 即 z 方向上的应力分量 $\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ 都为零.
5. 挠度 $w(x, y)$ 要小于板的厚度, 即这里薄板发生的形变为小挠度形变.

上述假设是由基尔霍夫和拉夫提出的, 因而线性板理论也被称为基尔霍夫(基尔霍夫-拉夫)板理论 (KirchhoffLove Plate Theory). 而对于厚板的形变来说, 其横向的剪力形变就不可忽略, 从而许多假设便不再成立, 这里我们便不再赘述.

基于上述假设, 我们可以通过分析薄板平面中的线段形变前后的长度变化来求出应力应变之间, 以及应变和位移之间的关系. 假设 $d\mathbf{r}(dx, dy, 0)$ 是一个形变前平行于 xy 平面单位长度, 其发生形变之后变为 $d\mathbf{r}'(dx', dy', dz')$, 则我们有:

$$\begin{aligned} dx' &= dx + d\bar{u} = \left[1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right]dx + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}dy, \\ dy' &= dy + d\bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}dx + \left[1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right]dy, \\ dz' &= 0 + d\bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}dx + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}dy, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}(x, y, z), \\ \bar{v} &= \bar{v}(x, y, z), \\ \bar{w} &= \bar{w}(z, y)\end{aligned}\tag{3.2}$$

是薄板中任意一点 (x, y, z) 的位移分量, 注意到这里因为基尔霍夫假设, z 方向上的位移 $\bar{w}$ 与 z 无关. 另外, $\bar{u}, \bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 是为了与中性面 ($z = 0$) 上点的位移分量 u, v, w 区分开, 也就是说两者有如下关系:

$$\bar{u}(x, y, 0) = u(x, y), \bar{v}(x, y, 0) = v(x, y), \bar{w}(x, y) = w(x, y).\tag{3.3}$$

因此该单位长度形变前后的长度差为:

$$ds' = |d\mathbf{r}'| = \sqrt{(1 + 2\bar{\epsilon}_{xx})dx^2 + (1 + 2\bar{\epsilon}_{yy})dy^2 + 2\bar{\epsilon}_{xy}dxdy},\tag{3.4}$$

其中 $\bar{\epsilon}_{xx}, \bar{\epsilon}_{yy}, \bar{\epsilon}_{xy}$ 是薄板内任意一点的应变, 且满足以下关系:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \bar{\epsilon}_{yy} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \bar{\epsilon}_{xy} &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right].\end{aligned}\tag{3.5}$$

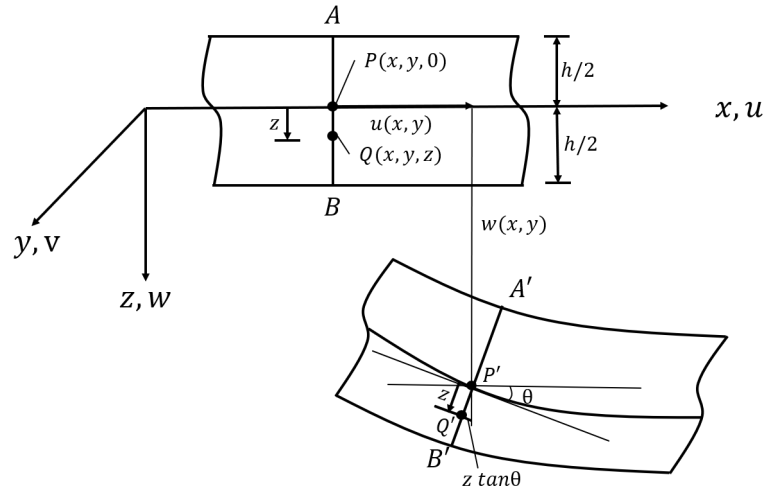
由之前的假设, 板内每个单位元的应变较小但其旋转相比较较大, 因此式(3.5)中的高阶项里关于 x 和 y 方向的位移的非线性项可以被忽略, 因此也可以简写为:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \bar{\epsilon}_{yy} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \bar{\epsilon}_{xy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

我们也可以进一步将式(3.5)进行简化, 忽略掉其中所有的非线性项, 变为:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \\ \bar{\epsilon}_{yy} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \\ \bar{\epsilon}_{xy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

式(3.6)是薄板大挠度的非线性理论的基础, 也被称作冯卡门非线性板理论, 而式(3.7)则是我们常见的经典线性板理论.

图 3.2 板形变前后位移状态在 xy 平面的示意图

在我们薄板理论的假设下, 板内任意一点的位移分量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 可以被简化表达为其相应在中性面上的对应量 u, v , 和 w . 图 3.2 所示为板的一个部分在形变前后 xz 平面上的截面示意图, 点 Q 在法线 AB 上, 形变前坐标为 (x, y, z) , 对应在中性面上的点为 P . 其在发生形变后位置变为 Q' 点, 其坐标为 $(x + \bar{u}, y + \bar{v}, z + \bar{w})$, 中性面上对应点为 P' . 因为在挠度较小的情况下, 我们有 $\tan \theta \approx \theta \approx \partial w / \partial x$, 根据图 3.2 并类比 yz 平面的相似情况, 我们有:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \bar{v} &= v - z \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

将式(3.8)带入式(3.7)得到:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{xx} &= \epsilon_{xx} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \bar{\epsilon}_{yy} &= \epsilon_{yy} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \bar{\epsilon}_{xy} &= \epsilon_{xy} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ 和 ϵ_{xy} 是中性面上对应点的应变, 满足:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

式(3.10)即为薄板理论下应变和位移之间的关系表达式. 因为不存在面内的作用力, 所以我们有 $u = v = 0$, 这也意味着 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yy} = 0$, 即薄板的中性面不存在拉伸或压缩. $-\partial^2 w / \partial x^2, -\partial^2 w / \partial y^2$ 表示了 x 轴和 y 轴方向上的曲率, $\partial^2 w / \partial x \partial y$ 表示了中性面形变的弯曲程度. 因此, 在这里我们考虑到中性面没有伸缩, 那么式(3.9)就可以写成:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \bar{\epsilon}_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \bar{\epsilon}_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

上述关系式用可以用矩阵向量的方式表示为:

$$\bar{\epsilon} = -z \mathbf{L} w,$$

其中: $\bar{\epsilon} = (\bar{\epsilon}_{xx}, \bar{\epsilon}_{yy}, \bar{\epsilon}_{xy})^T$, $\mathbf{L}$ 是微分矩阵 $\begin{bmatrix} \partial^2 / \partial x^2 & \partial^2 / \partial y^2 & 2\partial^2 / (\partial x \partial y) \end{bmatrix}^T$, 根据胡克定律, 我们知道 $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}) = \mathbf{c} \bar{\epsilon}$, 其中 $\bar{\sigma}$ 是面内任意点的应力, $\mathbf{c}$ 是材料矩阵, 在各向同性材料平面问题下有:

$$\mathbf{c} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}$$

其中 E 是杨氏模量, ν 是泊松比, 均是材料相关的系数. 因而我们有应力和挠度的关系:

$$\bar{\sigma} = -z \mathbf{c} \mathbf{L} w.$$

接下来我们进一步分析厚度为 h 的板内的一个 $dx \times dy$ 的单元体, 它受到外力 $f(x, y)$ 的作用, 并且其截面上存在的力矩 M_x, M_y, M_{xy} 和 M_{yx} 以及剪力 Q_x, Q_y 由其分布的应力所产生, 并且满足以下积分关系式:

$$M_p = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma} z dz = -\frac{h^3}{12} \mathbf{c} \mathbf{L} w, \quad (3.11)$$

展开写有:

$$\begin{aligned}M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned} \quad (3.12)$$

其中:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

并且注意到因为 $\bar{\sigma}_{xy} = \bar{\sigma}_{yx}$, 因而我们有 $M_{yx} = M_{xy}$. 而相应的考虑到单元体对于 x 方向和 y 方向的力矩平衡并且忽略二阶小量, 我们可以得到力矩与剪力之间的关系:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \\ Q_y &= \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

我们注意到单元体在 z 方向上是平衡的, 因此这个单元体受到的外力. 且注意到到剪力分量有 $dQ = (\partial Q_x / \partial x)dx$ 以及 $dQ = (\partial Q_y / \partial y)dy$, 我们有以下平衡方程:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f = 0, \quad (3.14)$$

最后我们将(3.11),(3.13)和(3.14)三式联立, 便可以得出板的静力学平衡方程:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = D\Delta^2 w = f. \quad (3.15)$$

其中 Δ^2 称为双调和算子.

注 3.1: 薄板模型的静态微分方程除了可以通过上述分析板内单元的 z 轴方向上的平衡条件得出之外, 也可以通过能量方程, 利用模型的最小势能原理得出[45]. 后者的优势在于可以同时得到各类边界和支撑方式的边界条件方程. 在这里我们不多做介绍.

3.2.2 边界条件

薄板理论的边界条件可以由以下等式表达:

$$\begin{aligned} \alpha_1 w + \alpha_2 Vw &= \alpha_3 \quad \text{on } \Gamma, \\ \beta_1 \frac{\partial w}{\partial n} + \beta_2 Mw &= \beta_3 \quad \text{on } \Gamma. \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $\alpha_i = \alpha_i(s), \beta_i = \beta_i(s) (i = 1, 2, 3)$ 是由边界 Γ 决定的函数, M 和 V 是微分算子:

$$\begin{aligned} M &= -D\left[\Delta + (\nu - 1)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right], \\ V &= -D\left[\frac{\partial}{\partial n}\Delta - (\nu - 1)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2}{\partial n \partial t}\right)\right]. \end{aligned}$$

量 Mw 和 Vw 描述了边界上的弯矩 M_n 和剪力 V_n , 如图 3.1 中所示. 式(3.16)描述了最为一般情况下的边界条件. 更为常见和典型的边界条件可以通过选取不同的 α_i 和 β_i 得到, 如以下几种情况:

1. 固定支撑: $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1$, 其余系数为零, 即为 $w = 0, \partial w / \partial n = 0$;
2. 简单支撑: $\alpha_1 = 1, \beta_2 = 1$, 其余系数为零, 即为 $w = 0, M_n = \Delta w + (\nu - 1)\partial^2 w / \partial t^2 = 0$; 这也是本文主要研究的边界类型.
3. 自由支撑 (无支撑): $\alpha_2 = 1, \beta_1 = 1$, 其余系数为零, 即为 $M_n = 0, V_n = 0$.

这里需要注意如果边界支撑方式是混合的, 那么系数方程 α_i 和 β_i 是不连续的.

注 3.2: 事实上, 对于我们本章所研究的简单支撑边界来说, 因为其边界条件可以写成:

$$\begin{aligned} w &= 0, & \text{on } \Gamma \\ \Delta w + (\nu - 1)\partial^2 w / \partial t^2 &= 0. & \text{on } \Gamma \end{aligned} \quad (3.17)$$

且对于曲线边界来说, 我们有如下关系:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial w}{\partial n},$$

其中 $\kappa = \kappa(s)$, 是边界的曲率, n 是边界的外法线方向, t 是边界的切线方向而 s 是这一点的弧线方向. 而当边界是由线段构成的时候 (例如矩形区域), 显然我们有:

$$\kappa = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0.$$

在这种情况下, 显然边界条件(3.17)则变成了:

$$\begin{aligned} w &= 0, & \text{on } \Gamma \\ \Delta w &= 0. & \text{on } \Gamma \end{aligned} \quad (3.18)$$

由我们之前得到的力矩和挠度之间的关系式(3.11), 我们令:

$$M = \frac{1}{1 + \nu}(M_x + M_y) = \Delta w,$$

则可以将矩形有界区域 Ω 上简支边界的薄板问题化为两个耦合的泊松方程的形式:

$$\begin{cases} \Delta M(X) = f(X) & X \in \Omega, \\ D\Delta w(X) = -M(X) & X \in \Omega, \\ M(X) = 0 & X \in \Gamma, \\ w(X) = 0 & X \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.19)$$

3.3 模型正问题分析

在本节中, 我们主要对矩形区域下简支边界的薄板问题, 即二维双调和方程的正问题进行分析和求解. 在薄板受到一个垂直于中性面的外力 f 的时候, 方程和相

应的边界条件可以表示为成(3.19)的形式. 我们设源函数, 即薄板所受到的负载力可以写成如下形式:

$$f(X) = F_k \delta(X - Y) + g(X) + h(X) \dot{W}_X, \quad X \in \Omega \quad (3.20)$$

其中 $X = (x_1, x_2)$, 或极坐标下的点 (r, θ) , $F_k \delta(X - Y)$ 是外界给定的作用在点 $Y = (y_1, y_2)$, 大小为 F_k 的点负载力. g 和 $h > 0$ 是在有界区域 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 上有紧支撑的确定实函数, 且 $\dot{W}_X$ 是一个齐次的有色噪声.

3.3.1 确定性正问题求解分析

首先, 我们外力, 即源函数为确定函数的情形下对解进行推导和性质的分析, 即 $f(X) = F_k \delta(X - Y) + g(X)$. 因而我们的问题就退化为解一个确定的偏微分方程:

$$\begin{cases} D\Delta^2 w = F_k \delta(X - Y) + g(X) & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \Delta w = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (3.21)$$

在此之前, 我们先推导出双调和算子的基本解 U . 即 $\Delta^2 U(X, Y) = \delta(X, Y)$.

令 $V = \Delta U$, 则显然有 $\Delta V = \delta(X, Y)$, 由拉普拉斯算子的基本解, 我们知道:

$$V = \Delta U = \frac{1}{2\pi} \ln |X - Y| \triangleq \frac{1}{2\pi} \ln r,$$

从而有:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) U = \frac{\ln r}{2\pi}$$

通过求解上述方程, 我们可以得到

$$\begin{aligned} U(X, Y) &= \frac{r^2 \ln r}{8\pi} - \frac{r^2}{8\pi} + c_1 \ln r + c_2 \\ &= \frac{|X - Y|^2 \ln |X - Y|}{8\pi} - \frac{|X - Y|^2}{8\pi} + c_1 \ln |X - Y| + c_2 \end{aligned}$$

而通过计算可以得知:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \left(-\frac{|X - Y|^2}{8\pi} + c_2 \right) &= 0, \\ \Delta^2 c_1 \ln r &= \Delta(C\delta) = C\Delta\delta \neq \delta(|X - Y|). \end{aligned}$$

同时可以验证得到

$$\Delta^2 \left(-\frac{|X - Y|^2}{8\pi} \ln |X - Y| \right) = \delta(|X - Y|).$$

从而我们有双调和算子的基本解为:

$$U(X, Y) = \frac{|X - Y|^2}{8\pi} \ln |X - Y|.$$

而对于我们的问题(3.19)的格林函数 $G(X, Y)$, 即为找到一个李普希兹连续的函数 $R(X, Y)$, 满足:

$$\Delta^2 R = 0,$$

$$R(X, Y) = -U(X, Y) \quad X, Y \in \Gamma.$$

则问题(3.19)的格林函数则为 $G(X, Y) = U(X, Y) + R(X, Y)$. 从而问题(3.21)的解则可以写成:

$$\begin{aligned} w(X, Y) &= \frac{1}{D} \int_{\Omega} G(X, Z) f(Z) dZ \\ &= \frac{1}{D} \left[F_k G(X, Y) + \int_{\Omega} G(X, Z) g(Z) dZ \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

因为边界和区域的原因, 在许多情况下我们都没有办法将格林函数解析地表达出来, 但是我们依然可以对其进行分析. 接下来我们将介绍有关格林函数的正则性分析的几个结果.

引理 3.1: 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域, 对于任意固定的点 $Y \in \Omega$ 都有 $G(X, Y) \in L^2(\Omega)$.

证明 3.1: 令 $\rho = \sup_{X, Y \in \Omega}$, 我们有 $\bar{\Omega} \subset B_{\rho}(Y)$, 其中 $B_{\rho}(Y)$ 是以 Y 为圆心, ρ 为半径的圆. 因为我们将格林函数表达为以下形式:

$$G(X, Y) = \frac{|X - Y|^2}{8\pi} \ln |X - Y| + R(X, Y)$$

其中 R 是一个李普希兹连续的函数, 因此, 我们只需要证明格林函数的奇项是 L^2 的即可, 即证:

$$\ln |X - Y| \in L^2(\Omega), \quad \forall y \in \Omega.$$

通过计算我们可以得到:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \ln |X - Y| \right|^2 dX &\leq \int_{B_{\rho}(Y)} \left| \ln |X - Y| \right|^2 dX \\ &\lesssim \int_0^{\rho} r \left| \ln r \right|^2 dr = \frac{\rho^2}{4} (\ln \rho (\ln \rho - 1) - 1) < \infty. \end{aligned}$$

即得到我们需要的结论.

在本文中, $a \lesssim b$ 代表 $a \leq Cb$, 其中 $C > 0$ 是一个常数.

引理 3.2: 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域, 则对于任意的 $\alpha > 1$, 我们有以下不等式满足:

$$\int_{\Omega} |G(X, Y) - G(X, Z)|^{\alpha} dX \lesssim |Y - Z|^{\alpha}, \quad \forall Y, Z \in \Omega.$$

证明 3.2: 和引理 3.1类似, 我们只需证格林函数 $G(X, Y)$ 中的基本解项中 $|X - Y|^2 \ln |X - Y|$ 满足结论即可.

我们知道对于任意的 $\rho > 0, \rho^2 \ln \rho$ 满足关系:

$$\rho^2 \ln \rho = \int_0^\rho 2r \ln r dr + \frac{\rho^2}{2}.$$

从而我们有:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| |X - Y|^2 \ln |X - Y| - |X - Z|^2 \ln |X - Z| \right|^\alpha dX \\ &= \int_{\Omega} \left| \int_0^{|X-Y|} 2r \ln r dr + \frac{|X - Y|^2}{2} - \int_0^{|X-Z|} 2r \ln r dr - \frac{|X - Z|^2}{2} \right|^\alpha dX \\ &= \int_{\Omega} \left| \int_{|X-Z|}^{|X-Y|} 2r \ln r dr + \frac{|X - Y|^2 - |X - Z|^2}{2} \right|^\alpha dX \end{aligned}$$

由积分中值定理和三角不等式, 存在 $r_\xi \in (\min(|X - Y|, |X - Z|), \max(|X - Y|, |X - Z|))$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| |X - Y|^2 \ln |X - Y| - |X - Z|^2 \ln |X - Z| \right|^\alpha dX \\ & \leq \int_{\Omega} \left| |X - Z|(2r_\xi \ln r_\xi) + \frac{1}{2}|X - Z|(|X - Y| + |X - Z|) \right|^\alpha dX \\ & = |Y - Z|^\alpha \int_{\Omega} \left(2r_\xi \ln r_\xi + \frac{1}{2}(|X - Z| + |Y - Z|) \right)^\alpha dX \end{aligned}$$

令 $\rho = \sup_{X \in \Omega, Y \in \Omega} |X - Y|$, 则有 $\bar{\Omega} \subset B_\rho(Y), \bar{\Omega} \subset B_\rho(Z)$ 且 $r_\xi \in (0, \rho)$, 因此有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(2r_\xi \ln r_\xi + \frac{1}{2}(|X - Z| + |Y - Z|) \right)^\alpha dX \\ & \lesssim \int_{\Omega} (2r_\xi \ln r_\xi)^\alpha dX + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|X - Z|\right)^\alpha dX + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|X - Y|\right)^\alpha dX \\ & < (2\rho \ln \rho)^\alpha \mu(\Omega) + 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^\alpha \mu\Omega \\ & = \mu(\Omega) \left((2\rho \ln \rho)^\alpha + 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^\alpha \right) < \infty. \end{aligned}$$

从而引理得证.

3.3.2 随机方程构成与分析

现在我们来考虑原函数为随机函数的情况. 随机源可以表示成(3.20)的形式, 则我们的问题有以下形式:

$$\begin{cases} D\Delta^2 w = F_k \delta(X - X_0) + g(X) + h(X) \dot{W}_X & X \in \Omega, \\ w(X) = 0 & X \in \Gamma, \\ \Delta w(X) = 0 & X \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.23)$$

其中非齐次项中的有色噪声 $\dot{W}_X$ 满足协方差方程:

$$c(X, Y) = \mathbf{E}(\dot{W}_X \dot{W}_Y) = c(X - Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2.$$

在这里我们假设在对于某个 $q_0 \geq 1$ 的情况下 $c \in L_{\text{loc}}^{q_0}(\mathbb{R}^2)$.

一般来说, 对于协方差方程有很多种选择, 例如 Delta 核、Riesz 核或者热核等等. 对其详细的介绍可以参照本文的第 2 章第 2.2.3 节, 在这里我们不多赘述. 和确定性正问题时类似, 我们也可以相应地写出随机正问题的解的表达式:

$$w(X, Y) = \frac{1}{D} \left[F_k G(X, Y) + \int_{\Omega} G(X, Z) g(Z) dZ + \int_{\Omega} G(X, Z) h(Z) dW_Z \right]. \quad (3.24)$$

为了保证随机源下方程解(3.24)的适定性, 我们对随机源的系数方程 g 和 h 做以下假设:

假设 3.1: 在协方差函数 $c(X, Y) \in L_{\text{loc}}^{q_0}(\mathbb{R}^2)$, $q_0 \geq 1$ 时, 设 $p_0 = \frac{2q_0}{2q_0-1}$. 从而我们假设 $g \in L^2(\Omega)$ 且 $h \in L^p(\Omega)$, 其中 p 满足 $p \in (p_0, \infty]$. 除此之外, 我们同样要求 h 是 η -Hölder 连续的, 即 $h \in C^{0,\eta}(\Omega)$, 其中 $\eta \in (0, 1)$.

事实上, 对 g 的平方可积的要求是因为需要保证确定性正问题(3.21)的解的适定性, 而对 h 的正则性的要求则是来自于对随机积分

$$\int_{\Omega} G(X, Z) h(Z) dW_Z$$

的适定性要求, 也就是要求其满足:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\left| \int_{\Omega} G(X, Z) h(Z) dW_Z \right|^2 \right) \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(X, Z) h(Z) c(Z - Y) \overline{G(X, Y)} h(Y) dZ dY < \infty. \end{aligned} \quad (3.25)$$

为了进一步说明我们假设的必要性, 我们接下来介绍杨不等式:

引理 3.3: 令 $p, q, r \geq 1$ 并且满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$, 则以下不等式对于任意 $u \in L^p(\mathbb{R}^d), v \in L^q(\mathbb{R}^d), w \in L^r(\mathbb{R}^d)$ 满足:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(X) v(X - Y) w(Y) dX dY \right| \leq \|u\|_p \|v\|_q \|w\|_r. \quad (3.26)$$

将(3.26)带入到式(3.25)的右端则有:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(X, Z) h(Z) c(Z - Y) \overline{G}(X, Y) h(Y) dZ dY \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega}(Z) G(X, Z) h(Z) \chi_{B_{2R}}(Z - Y) c(Z - Y) \chi_{\Omega}(Y) \overline{G}(X, Y) h(Y) dZ dY \\ &\leq \|G(X, \cdot) h(\cdot)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^2 \|c\|_{L^{q_0}(B_{2R})}, \end{aligned}$$

其中 $R = \max_{Y, Z \in \Omega} \{Y, Z\}$ 且 $p_0 = \frac{2q_0}{2q_0-1}$. 注意到之前我们说明了协方差函数满足 $c \in L_{\text{loc}}^{q_0}$, 其中 $q_0 \geq 1$ 因此这里自然有 $p_0 \in [1, 2]$.

注 3.3: 当协方差函数为 delta 核时, 通过计算我们可以知道:

$$\mathbf{E} \left(\left| \int_{\Omega} G(X, Z) h(Z) dW_Z \right|^2 \right) = \int_{\Omega} |G(X, Z)|^2 h^2(Z) dZ.$$

且因为 $c(x) = \delta(x)$, 从而 $q_0 = 1$, $p_0 = \frac{2q_0}{2q_0-1} = 2$, 因此这种情况下我们要求 $h \in L^p(\Omega)$, $p \in (2, \infty]$.

因为正如前文所说, 方程的格林函数可以表示为其奇项加上一个李普希兹连续的函数, 即

$$G(X, Y) = -\frac{|X - Y|^2}{8\pi} \ln \frac{1}{|X - Y|} + V(X, Y),$$

从而我们有以下估计:

$$\begin{aligned} & \|G(X, \cdot) h(\cdot)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} |G(X, Y)|^{p_0} h(Y)^{p_0} dY \\ &= \int_{\Omega} \left| \frac{|X - Y|^2}{8\pi} \ln \frac{1}{|X - Y|} + V(X, Y) \right|^{p_0} h(Y)^{p_0} dY \\ &\lesssim \int_{\Omega} \left| |X - Y|^2 \ln \frac{1}{|X - Y|} \right|^{p_0} h(Y)^{p_0} dY + C \int_{\Omega} h(Y)^{p_0} dY \end{aligned}$$

对于上式估计的第二项来说, 我们要求 h 至少是 $L^{p_0}(\Omega)$ 的, 而对于第一项来说, 根据 Hölder 不等式我们有估计:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| |X - Y|^2 \ln \frac{1}{|X - Y|} \right|^{p_0} h(Y)^{p_0} dY \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |X - Y|^{\frac{2p_0 p}{p-p_0}} \left| \ln \frac{1}{|X - Y|} \right|^{\frac{p_0 p}{p-p_0}} dY \right)^{\frac{p-p_0}{p}} \left(\int_{\Omega} |h(Y)|^p dY \right)^{\frac{p_0}{p}}. \end{aligned}$$

不等式右边的第一项是带有奇项的积分, 令 $\rho > 0$ 满足 $\bar{\Omega} \subset B_\rho(X)$, 我们有计算:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |X - Y|^{\frac{2p_0p}{p-p_0}} \left| \ln \frac{1}{|X - Y|} \right|^{\frac{p_0p}{p-p_0}} dY \\ & \leq \int_{B_\rho(X)} |X - Y|^{\frac{2p_0p}{p-p_0}} \left| \ln \frac{1}{|X - Y|} \right|^{\frac{p_0p}{p-p_0}} dY \lesssim \int_0^\rho r \left| r^2 \ln \frac{1}{r} \right|^{\frac{p_0p}{p-p_0}} dr. \end{aligned}$$

显然上述估计适定的前提是 $p > p_0$, 因此我们得出对 p 的要求是 $p \in [p_0, \infty]$, 其中 $p_0 = \frac{2q_0}{2q_0-1}$. 而对于函数 h 的 Hölder 连续性, 我们将在下述方程解的分析中进一步提到.

定理 3.1: 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域. 在假设 3.1 成立的前提下, 唯一存在一个连续的随机过程 $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 满足:

$$w(X) = \frac{F_k}{D} G(X, Y) + \frac{1}{D} \int_{\Omega} G(X, Z) g(Z) dZ + \frac{1}{D} \int_{\Omega} G(X, Z) h(Z) dW_Z. \quad (3.27)$$

也被称作是随机问题(3.23)的弱解.

证明 3.3: 首先我们证明随机场:

$$v(X) = \int_{\Omega} G(X, Z) h(Z) dW_Z \quad X \in \Omega$$

具有连续模.

由引理 3.26 和 Hölder 不等式, 我们对于 $\forall X, Y \in \Omega$ 都有:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|v(X) - v(Y)|^2) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} (G(X, Z) - G(Y, Z)) h(Z) \\ &\quad \times c(Z - \Phi) (\bar{G}(X, \Phi) - \bar{G}(Y, \Phi)) h(\Phi) dZ d\Phi \\ &\leq \|(G(X, \cdot) - G(Y, \cdot)) h(\cdot)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^2 \|c\|_{L^{q_0}(B_{2R})}. \end{aligned}$$

而根据引理 3.2 我们有

$$\int_{\Omega} |G(X, Z) - G(Y, Z)|^{\frac{p_0p}{p-p_0}} \lesssim |X - Y|^{\frac{p_0p}{p-p_0}},$$

从而有:

$$\mathbf{E}(|v(X) - v(Y)|^2) \lesssim |X - Y|^2.$$

因为 $v(X) - v(Y)$ 是高斯随机变量, 我们从而对任意的整数 q 都有:

$$\mathbf{E}(|v(X) - v(Y)|^{2q}) \lesssim (\mathbf{E}(|v(X) - v(Y)|^2))^{2q} \leq (\mathbf{E}(|v(X) - v(Y)|^2))^q \lesssim |X - Y|^{2q}.$$

令 $q \geq 1$, 我们则利用科莫戈洛夫连续定理得到结论, 即对于随机场 v 存在连续模.

显然, 弱解的唯一性可以直接从解的解析表达中直接得到, 其唯一性只依赖于其格林函数 G , 外力 F_{X_0} , 以及源函数 g 和 h .

接下来我们构造性证明其解的存在性. 我们构造一系列随机过程 $\dot{W}_X^n$ 满足 $h\dot{W}_X^n \in L^2(\Omega)$, 以及一系列随机函数

$$v^n(X) = \int_{\Omega} G(X, Z)h(Z)dW_Z^n, \quad X \in \Omega,$$

且该序列满足当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $v^n \rightarrow v$. 令 $T_n = \cup_{j=1}^n K_j$ 是 Ω 的一个正则三角形组成的几何. 那么我们写出其分段常数逼近列:

$$\dot{W}_X^n = \sum_{j=1}^n |K_j|^{-1} \int_{K_j} dW_X \chi_j(X),$$

其中 χ_j 是 K_j 的特征方程, 且有:

$$\int_{K_j} dW_X \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Var}_j), \quad \mathbf{Var}_j = \int_{K_j} \int_{K_j} c(X - Y)dX dY.$$

显然对于任意的 $q \geq 1$, 我们有:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|\dot{W}_X^n\|_{L^q(\Omega)}^q) &= \mathbf{E}\left(\int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^n |K_j|^{-1} \int_{K_j} dW_X \chi_j(X) \right|^q dX\right) \\ &\lesssim \sum_{j=1}^n |K_j|^{1-q} (\mathbf{Var}_j)^{q/2} < \infty, \end{aligned}$$

从而得证对于任意的 $q \geq 1$ 我们有 $\dot{W}^n \in L^q(\Omega)$. 当我们给定一个满足假设 3.1 的 p 时, 令 q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, 则由 Hölder 不等式我们有:

$$\|h\dot{W}^n\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|h\|_{L^p(\Omega)}^2 \|\dot{W}^n\|_{L^q(\Omega)}^2 < \infty,$$

从而可以得到结论 $h\dot{W}^n \in L^2(\Omega)$. 利用引理 3.2, 我们有:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} G(X, Z)h(Z)dW_Z - \int_{\Omega} G(X, Z)h(Z)dW_Z^n \right|^2 dX\right) \\ &= \mathbf{E}\left[\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \chi_j(Y)|K_j|^{-1} \int_{K_j} (G(X, Z)h(Z) - G(X, Y)h(Y))dY dW_Y \right|^2 dX\right] \\ &\leq \int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^n \chi_j(\cdot)|K_j|^{-1} \int_{K_j} (G(X, \cdot)h(\cdot) - G(X, Y)h(Y))dY \right\|_{L^{p_0}(\Omega)}^2 \|c\|_{L^{q_0}(B_{2R})} dX \\ &\lesssim \sum_{j=1}^n |K_j|^{-1} \int_{K_j} \int_{K_j} \int_{\Omega} |G(X, Z)h(Z) - G(X, Y)h(Y)|^2 dX dY dZ. \end{aligned}$$

再利用三角不等式和柯西-施瓦兹不等式, 我们有:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |G(X, Z)h(Z) - G(X, Y)h(Y)|^2 dX \\ & \lesssim \int_{\Omega} |G(X, Z) - G(X, Y)|^2 |h(Z)|^2 dX + \int_{\Omega} |G(X, Y)|^2 |h(Z) - h(Y)|^2 dX. \end{aligned}$$

由于我们在假设 3.1 中设 h 是 η -Hölder 连续的, 以及根据引理 3.1 和 3.2, 我们有:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |G(X, Z)h(Z) - G(X, Y)h(Y)|^2 dX \\ & \leq \int_{\Omega} |G(X, Z)h(Z) - G(X, Y)(h(Z) + |Z - Y|^{\eta})|^2 dX \\ & \lesssim h^2(Z) \int_{\Omega} |G(X, Z) - G(X, Y)|^2 dX + |Z - Y|^{2\eta} \int_{\Omega} |G(X, Y)|^2 dX \\ & \lesssim h^2(Z) |Z - Y|^2 + |Z - Y|^{2\eta}, \end{aligned}$$

从而有:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} G(X, Z)h(Z) dW_Z - \int_{\Omega} G(X, Z)h(Z) dW_Z^n \right|^2 dX \right) \\ & \lesssim \sum_{j=1}^n |K_j|^{-1} \int_{K_j} \int_{K_j} h^2(Y) |Z - Y|^2 dY dZ + \sum_{j=1}^n |K_j|^{-1} \int_{K_j} \int_{K_j} |Y - Z|^{2\eta} dY dZ \\ & \leq \|h\|_{L^2(\Omega)}^2 \max_{1 \leq j \leq n} (\text{diam} K_j)^2 + |\Omega| \max_{1 \leq j \leq n} (\text{diam} K_j)^{2\eta} \end{aligned}$$

因为 $n \rightarrow \infty$ 时 K_j 的直径 $\text{diam} K_j$ 趋于零, 从而上式当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于零. 对于每一个 $n \in \mathbb{N}$, 我们考虑以下随机问题:

$$\begin{cases} D\Delta^2 w_n(X) = F_k \delta(X - Y) + g(X) + h(X) \dot{W}_X^n & X \in \Omega, \\ w_n(X) = 0 & X \in \Gamma, \\ \Delta w_n(X) = 0 & X \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.28)$$

因为 $h(X) dW_X^n \in L^2(\Omega)$, 所以问题(3.28)存在唯一解, 且有以下表达式:

$$w_n(X, Y) = \frac{1}{D} \left[F_k G(X, Y) + \int_{\Omega} G(X, Z) g(Z) dZ + v_n(X) \right]. \quad (3.29)$$

因为当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{E}(\|w_n - w\|_{L^2(\Omega)}^2) = \mathbf{E}(\|v_n - v\|_{L^2(\Omega)}^2) \rightarrow 0$, 所以存在 w_n 的一组子序列收敛到 w . 对式(3.29)中令 $n \rightarrow \infty$, 我们就得到了原问题的弱解的表达式(3.27)并且完成了该证明.

注 3.4: 显然我们可以从式(3.27)中看出, 正问题的弱解中当 $h = 0$, 也就是没有随机项的时候, 随机问题的弱解也就退化为了确定性问题的解.

3.4 随机反问题

在本节中, 我们基于上述求导出的正问题弱解(3.27)给出重构随机源期望 $g(X)$ 和方差 $h^2(X)$ 以及刚度系数 D 的方法. 由于所给点外力的大小 F_k 可以在测量途中保持恒定, 且薄板形变挠度仅在附加点力接触处得以测量, 因此我们希望能够通过数据 $w(Y, Y), Y \in \Omega$ 唯一重构得到随机源. 注意到在这里, 我们假定随机源是白噪音, 而非有色噪音, 即 $c(X - Y) = \delta(X - Y)$. 首先, 我们基于上一节给出的弱解的解析表达形式推导出用以重构随机源的期望和方差的两个 Fredholm 积分方程. 但是这里注意到我们求出的 Fredholm 积分方程是不适定的, 因此随后我们将利用吉洪诺夫正则化方法来求解相应的积分方程, 从而解决我们提出的随机反源问题.

3.4.1 积分方程

首先, 对于问题(3.23), 若外力施加点为 Y , 我们有挠度 $w(X, Y)$ 在 $X = Y$ 时的弱解析表达式:

$$w(Y) = \frac{1}{D} \left[F_k G(Y, Y) + \int_{\Omega} G(Y, Z) g(Z) dZ + \int_{\Omega} G(Y, Z) h(Z) dW_Z \right].$$

由 Itô 等距公式, 我们有:

$$\mathbf{E} \left[\int_{\Omega} G(Y, Z) h(Z) dW_Z \right] = 0,$$

因而对方程两边求期望得到:

$$\mathbf{E}[w(Y)] = \frac{1}{D} \left[F_k G(Y, Y) + \int_{\Omega} G(Y, Z) g(Z) dZ \right].$$

我们在测量时取两个不同值的附加点力 F_1 和 F_2 , 则可以得到两个不同的随机场 $w_1(Y)$ 和 $w_2(Y)$, 因而对于关系式(3.30), 我们可以得到:

$$\mathbf{E}[w_1(Y)] = \frac{1}{D} \left[F_1 G(Y, Y) + \int_{\Omega} G(Y, Z) g(Z) dZ \right] \triangleq \mathbf{E}_1, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{E}[w_2(Y)] = \frac{1}{D} \left[F_2 G(Y, Y) + \int_{\Omega} G(Y, Z) g(Z) dZ \right] \triangleq \mathbf{E}_2. \quad (3.31)$$

因为噪音不受外加点力影响, 从而刚度系数可以简单由下式算出:

$$D = G(Y, Y) \frac{F_1 - F_2}{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2}, \quad \forall Y \in \Omega. \quad (3.32)$$

注意到这里对于任意给定的一个 $Y \in \Omega$ 都可以计算得到这一系数, 理论上施加外力的点的变化不会对 D 的计算产生影响. 将(3.32)带入(3.30)则可以得到下列积分方程表达式:

$$\int_{\Omega} G(Y, Z) g(Z) dZ = \frac{\mathbf{E}_2 F_1 - \mathbf{E}_1 F_2}{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2} G(Y, Y) \triangleq \hat{\mathbf{E}}[w(Y)]. \quad (3.33)$$

同时我们利用 2.2.3 节中的定理 2.13, 从而有

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[\left| \int_{\Omega} G(Y, Z) h(Z) dW_Z \right|^2 \right] \\
&= \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(Y, Z) h(Z) c(Z - \Phi) \overline{G(Y, \Phi)} h(\Phi) dZ d\Phi \\
&= \int_{\Omega} |G(Y, Z)|^2 h^2(Z) dZ
\end{aligned} \tag{3.34}$$

从而我们对方程两边求方差得到:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[Dw(Y)] &= D^2 \mathbf{Var}[w(Y)] = \mathbf{Var} \left[\int_{\Omega} G(Y, Z) h(Z) dW_Z \right] \\
&= \int_{\Omega} |G(Y, Z)|^2 h^2(Z) dZ.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

这里的 D 已由之前的式(3.32)计算得出. 从而我们得到了关于 g 和 h 的两个 Fredholm 积分方程.

从统计意义上来讲, 对 g 和 h 的重构都需要用到对真实数据的期望和方差. 根据强大数定律, 随机变量的期望可以被大量独立同分布的实验数据的均值逼近. 但是我们的实验次数只能是有限的, 因此实际上得到的期望和方差总是有误差存在的.

3.4.2 数值方法

首先我们先给出方程格林函数的级数表达形式用于后续数值计算. 对于矩形边界下的问题(3.23), 我们可以将其看做是两个满足狄利克雷边界的泊松方程耦合的结果, 即(3.19)的形式. 如果我们设泊松方程的格林函数为 $G^*(X, Y)$, 则显然有:

$$\begin{aligned}
M(Z) &= \int_{\Omega} G^*(X, Z) f(X) dX, \\
w(Y) &= \int_{\Omega} G^*(Y, Z) M(Z) dZ \\
&= \int_{\Omega} G^*(Y, Z) \left(\int_{\Omega} G^*(X, Z) f(X) dX \right) dZ \\
&= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G^*(Y, Z) G^*(X, Z) dZ \right) f(X) dX \\
&\triangleq \int_{\Omega} G(Y, X) f(X) dX.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

所以问题(3.23)的格林函数可以写作两个拉普拉斯算子在狄利克雷边界条件下的积分, 即 $G(X, Y) = \int_{\Omega} G^*(Z, X) G^*(Z, Y) dZ$. 而对于拉普拉斯算子在矩形区域狄利克雷边界下的格林函数, 我们可以用其特征函数展开的形式表示.

我们知道, 如果一个微分算子 $\mathcal{L}$ 存在一系列特征方程 Ψ_n 和特征值 λ_n 使得其

满足 $\mathcal{L}\Psi_n = \lambda_n \Psi_n$, 且 $\{\Psi_n\}$ 是完备的, 即其满足:

$$\delta(X - Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^\dagger(X) \Psi_n(Y)$$

则格林函数满足:

$$G(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_n^\dagger(X) \Psi_n(Y)}{\lambda_n},$$

其中 $\dagger$ 代表共轭转置.

对于矩阵区域 $X = (x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b]$ 下满足狄利克雷边界的拉普拉斯算子, 其特征函数为:

$$\Psi_{mn}(X) = \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right)$$

且其对应的特征值为:

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]$$

则我们有:

$$G^*(X, Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{mn}(X) \Psi_{mn}(Y)}{\lambda_{mn}}.$$

将上式带入(3.36)则有:

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= \int_{\Omega} G^*(X, Z) G^*(Z, Y) dZ \\ &= \int_{\Omega} \sum_m \sum_n \frac{\Psi_{mn}(X) \Psi_{mn}(Z)}{\lambda_{mn}} \cdot \sum_p \sum_q \frac{\Psi_{pq}(Y) \Psi_{pq}(Z)}{\lambda_{pq}} dZ \\ &= \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \left[\frac{\Psi_{mn}(X) \Psi_{pq}(Y)}{\lambda_{mn} \lambda_{pq}} \int_{\Omega} \Psi_{mn}(Z) \Psi_{pq}(Z) dZ \right] \end{aligned}$$

由于特征函数的正交性, 上式只在 $m = p, n = q$ 时非零, 因而我们得到:

$$G(X, Y) = \frac{ab}{4} \sum_m \sum_n \left[\frac{\Psi_{mn}(X) \Psi_{mn}(Y)}{\lambda_{mn}^2} \right] \quad (3.37)$$

由引理 3.1 我们知道 $G(X, Y)$ 对于固定的 $Y \in \Omega$ 满足 $G(X, Y) \in L^2(\Omega)$, 且 Ω 是一个有界区域, 显然有 $G(X, Y) \in L^2(\Omega \times \Omega; \mathbb{R})$. 从而易于验证 $G(X, Y)$ 是一个希尔伯特-施密特核, 从而积分算子 $(\mathcal{G}g)(X) = \int_{\Omega} G(X, Y)g(Y)dY$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的一个对称紧算子. 因此这个积分算子存在一系列的实特征值以及唯一的聚点零. 这也导致了其相应的逆算子是无界的, 因此求解这一反问题必然是不稳定的. 同理, 我们也可以得出用于重构 $\bar{h} = h^2$ 的积分算子 $\bar{\mathcal{G}}$ 所对应的方程 $(\bar{\mathcal{G}}\bar{h})(X) = \int_{\Omega} G^2(X, Y)\bar{h}(Y)dY$ 是不适定的.

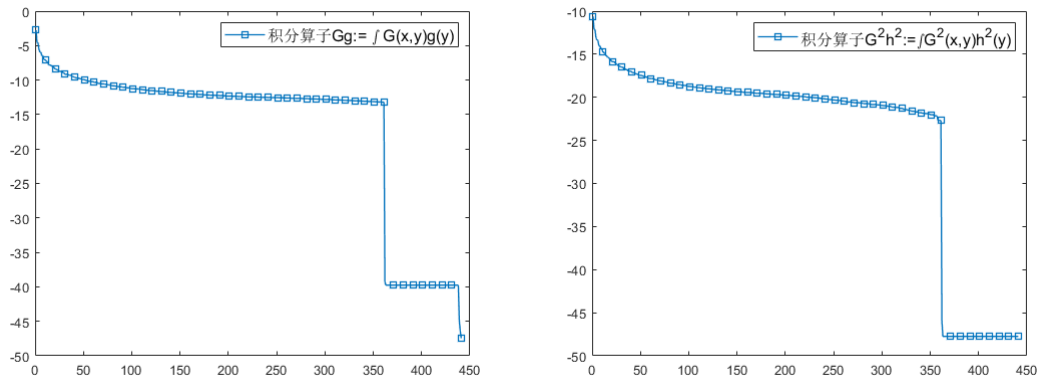


图 3.3 核函数分别为 $G(x,y)$ (左) 和 $G^2(x,y)$ (右) 的 Fredholm 积分算子的奇异值分布 (对数刻度下)

实际上, 从数值上来讲, 显然可以从图 3.3 中看出表达式(3.33)和(3.35)的积分算子的奇异值下降的非常迅速, 从而从数值上解释了不适定问题在数值算法中的不稳定性.

为了处理上述原因带来的不稳定性, 我们将利用吉洪诺夫正则化方法来处理数据. 定义 J 是代价函数, 满足:

$$\begin{aligned} J_1(g) &= \left\| \int_{\Omega} G(Y, Z)g(Z)dZ - \hat{\mathbf{E}}[w(Y)] \right\|_{L^2}^2 + \alpha \|g\|_{L^2}^2 \\ &= \left\| \mathcal{G}g - \hat{\mathbf{E}}[w] \right\|_{L^2}^2 + \alpha \|g\|_{L^2}^2, \\ J_2(\bar{h}) &= \left\| \int_{\Omega} G^2(Y, Z)\bar{h}(Z)dZ - \mathbf{Var}[Dw(Z)] \right\|_{L^2}^2 + \beta \|\bar{h}\|_{L^2}^2 \\ &= \left\| \overline{\mathcal{G}}\bar{h} - \mathbf{Var}[Dw] \right\|_{L^2}^2 + \beta \|\bar{h}\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

其中 α 和 β 是正则化参数.

由第 2.1.2 节的定理 2.10 我们知道, 不适定方程的正则化解 g_{α} 与 $\bar{h}_{\alpha}$ 与代价函数有以下关系:

$$\begin{aligned} g_{\alpha} &= \arg \min_g J_1(g), \\ \bar{h}_{\alpha} &= \arg \min_{\bar{h}} J_2(\bar{h}), \end{aligned}$$

且代价函数最小在其梯度等于零时取到, 因此对等式求 Fréchet 导数并取其等于零则有:

$$\alpha g_{\alpha}(Y) + \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(Y, X')G(X', Z)g_{\alpha}(Z)dZdX' = \int_{\Omega} G(Y, Z)\hat{\mathbf{E}}[w(Z)]dZ, \quad (3.38)$$

$$\beta \bar{h}_\alpha(Y) + \int_{\Omega} \int_{\Omega} G^2(Y, X') G^2(X', Z) \bar{h}_\alpha(Z) dZ dX' = \int_{\Omega} G^2(Y, Z) \mathbf{Var}[Dw(Z)] dZ, \quad (3.39)$$

3.5 数值算法

在本节中, 我们将先后讨论正问题和反问题求解的算法. 并给出两个数值实例用以说明算法的有效性.

3.5.1 模型数据及正问题求解

为了避免正问题求解用到的源和反问题得到的结果“正好”一样, 我们需要利用传统的数值计算方法来求解正问题(3.24), 而不能直接利用积分方程(3.23)来得到结果. 因为本文中研究的二维双调和方程可以看做是两个耦合的拉普拉斯方程, 所以在本节中我们将利用五点差分方法通过求解两个耦合的拉普拉斯方程来得到 w 数据.

我们知道, 有限差分法的思想是用差分来代替偏导数, 即:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\simeq \frac{\Delta w(x + \Delta x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &\simeq \frac{\Delta w(x, y + \Delta y)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

令求解区域为 $x \in [0, a], y \in [0, b]$ 的矩形区域, x 方向的步长为 h_x, y 方向步长为 h_y , 且有:

$$\begin{aligned} x_i &= (i - 1) \times h_x, \quad i = 1, 2, \dots, Nx, \quad Nx = a/h_x, \\ y_j &= (j - 1) \times h_y, \quad j = 1, 2, \dots, Ny, \quad Ny = b/h_y, \\ w_{ij} &\triangleq w(x_i, y_j) \triangleq w(X_{ij}). \end{aligned}$$

拉普拉斯算子离散的五点差分格式为:

$$\Delta w_{ij} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{h_y^2}.$$

从而我们可以得出拉普拉斯算子的离散矩阵, 而对于点外力 $F_k \delta(X - X_0)$ 中的狄拉克函数, 我们通过以下函数进行离散逼近:

$$\delta(X_{ij} - Y_{kl}) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_k)^2 + (y_j - y_l)^2}{\sigma^2}\right).$$

对于随机源 $h(X)\dot{W}_X$ 中白噪音的离散, 由于随机过程的导数 $\dot{W}_X$ 只在分布下存在意义, 因此在离散下我们则有:

$$\dot{W}_{X_{ij}} = \int_{I_{ij}} dW_X \stackrel{d}{=} \sqrt{|I_{ij}|} \xi_{ij}.$$

其中 $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = h_x \times h_y, \xi_{ij}$ 是该区间上服从标准正态分布的随机变量.

3.5.2 反系数问题

在取两个不同的外力数值 F_1 和 F_2 后, 根据关系式(3.32)我们很容易求解得出刚度系数. 在这里值得注意的是, 理论上我们只需要任取区域内任意一点施加外力后进行该点的挠度测量就可以求得其刚度系数 D , 即:

$$D(X_{ij}) = G(X_{ij}, X_{ij}) \frac{F_1 - F_2}{\mathbf{E}_1(X_{ij}) - \mathbf{E}_2(X_{ij})}, \quad X_{ij} = (x_i, y_j).$$

在接下来的实例中我们将给出在区域内每一点求得的刚度系数图像.

3.5.3 随机源求解重构

在求得刚度系数 D 之后, 我们便可以利用格林函数 $G(X, Y)$ 的级数表达形式(3.37)来离散方程(3.33)与(3.35)得到离散后的数据模型:

$$\begin{aligned} K\mathbf{g} &= \mathbf{w}_1, \\ \overline{K}\mathbf{h} &= \mathbf{w}_2. \end{aligned}$$

其中, K 和 $\overline{K}$ 分别为离散算子 $\mathcal{G}$ 和 $\overline{\mathcal{G}}$ 后得到的矩阵, $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{h}$ 为我们需要重构的随机源函数的离散值, $\mathbf{w}_1$ 为离散后的 $\hat{\mathbf{E}}[w]$, $\mathbf{w}_2$ 为离散后的 $\mathbf{Var}[Dw(Y)]$.

因为上述方程的不适定性, 我们需要在数值计算上进行正则化处理, 在本章中我们选择吉洪诺夫正则化方法, 具体定义及表达形式在第 2.1.2 中给出, 在这里不再赘述. 而关于正则化参数的选取, 我们采用 L 曲线法. 对于重构随机源函数期望 g 来说, 设矩阵 K 的奇异值分解为 $K = U \text{diag}(s_i) V^T$, 由第 2.1.2 节我们知道 L 曲线是有关 $X(\alpha) = \log R(\alpha)$ 和 $Y(\alpha) = \log S(\alpha)$ 的曲线, 其中 α 是正则化参数, $S(\alpha)$ 是正则化解向量 $\mathbf{g}_\alpha$ 的范数, $R(\alpha)$ 是正则化残差的范数 $K\mathbf{g}_\alpha - \mathbf{w}_1$. 由于吉洪诺夫正则化保证了 $X(\alpha)$ 和 $Y(\alpha)$ 的光滑性, 所以对于确定 L 曲线拐点对应的 α 参数值等价于最大曲率方程

$$\kappa(\alpha) = \frac{X''(\alpha)Y'(\alpha) - X'(\alpha)Y''(\alpha)}{(X'(\alpha) + Y'(\alpha))^{3/2}}.$$

结合奇异值分解下的正则化解表示(2.9)我们有

$$\begin{aligned} R(\alpha) &= \sum_{s_i > 0} [w_\alpha(s_i^2) - 1]^2 \hat{g}_i^2 + \sum_{s_i = 0} \hat{d}_i^2, \\ S(\alpha) &= \sum_{s_i > 0} w_\alpha(s_i^2) \frac{\hat{g}_i^2}{s_i} \mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

且可以通过证明得到

$$R'(\alpha) = -\alpha S'(\alpha).$$

将上述关系带入曲率方程即有

$$\kappa(\alpha) = -\frac{R(\alpha)S(\alpha)[\alpha R(\alpha) + \alpha^2 S(\alpha)] + [R(\alpha)S(\alpha)]^2 / S'(\alpha)}{[R^2(\alpha) + \alpha^2 S^2(\alpha)]^{3/2}}. \quad (3.40)$$

具体算法如下:

Algorithm 1 求随机源函数期望 g 的正则化解 $\mathbf{g}_\alpha$

Require: 矩阵 $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 数据 $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^N$, 参数 α 采样点 n , 参数 α 最小要求 $\alpha_{\min}$

```

1:  $[U, S, V] = \text{svd}(K)$  ▷ 对  $K$  做 SVD 分解, 即  $K = USV^T$ 
2:  $\mathbf{s} \leftarrow \text{diag}(S)$ ,  $\beta \leftarrow U^T \mathbf{w}_1$ ,  $\xi \leftarrow \beta ./ s$  ▷  $.*$  与  $./$  分别为向量或矩阵对应元素相乘除
3:  $\alpha_n \leftarrow \max\{\alpha_{\min} .* s_1, s_N\}$ ,  $\text{ratio} \leftarrow (s_1 / \alpha_n)^{(n-1)^{-1}}$ 
4: for  $i = n - 1, \dots, 1$  do
5:    $\alpha_i \leftarrow \text{ratio} \times \alpha_{i+1}$ 
6: end for
7: for  $i = 1 \dots n$  do
8:    $f \leftarrow \mathbf{s}^2 ./ (\mathbf{s}^2 + \alpha_i^2)$  ▷ 针对每一个  $\alpha$  的过滤函数, 这里向量平方为分别元素乘方
9:    $\eta_i \leftarrow \|f .* \xi\|$ ,  $\rho_i \leftarrow \|(1 - f) .* \beta\|$  ▷  $K$  的秩为  $N$ , 奇异值均大于零
10: end for
11:  $\mathbf{c} \leftarrow -\text{curvature}(\rho, \eta)$  ▷ 由公式(3.40)计算 L 曲线的负曲率
12:  $[\text{cmin}, \text{ci}] \leftarrow \min(\mathbf{c})$  ▷  $\text{cmin}, \text{ci}$  分别为最小负曲率和对应的坐标
13:  $\mathbf{r}_c \leftarrow \text{fminbnd}(\alpha_{\text{gi}-1, \text{gi}+1})$  ▷ 在取样区间  $(\alpha_{\text{gi}-1, \text{gi}+1})$  中找到局部最小负曲率对应的  $\alpha$  值  $\mathbf{r}_c$ 
14:  $f \leftarrow (\mathbf{s}^2) ./ (\mathbf{s}^2 + \mathbf{r}_c^2)$ ,  $\eta_c \leftarrow \|f .* \xi\|$ ,  $\rho_c \leftarrow \|(1 - f) .* \beta\|$ 
15:  $\mathbf{g}_\alpha \leftarrow V \times f .* \xi$ 

```

接下来下面我们给出两个数值实例, 进一步分析算法的准确性和有效性.

3.5.4 数值算例及结果分析

例 3.1: 我们令 $F_1 = 10N, F_2 = 20N$, 刚度系数 $D = 0.05$, 区域为 $a = b = 1$. 源函数为:

$$g = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$h = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

重复试验 500 次, 且数据带有 3% 的测量误差.

首先我们给出确定性正问题的收敛速度, 即对于问题

$$\begin{cases} D\Delta^2 w(X) = F_1 \delta(X - X_0), & X = (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ w(0, x_2) = w(1, x_2) = w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 \\ \Delta w(0, x_2) = \Delta w(1, x_2) = \Delta w(x_1, 0) = \Delta w(x_1, 1) = 0. \end{cases}$$

当 $X_0 = (0.5, 0.5), (0.2, 0.8)$ 和 $(0.1, 0.1)$ 时, 在不同步长的情况下计算得出的挠度 $w(X_0)$ 与其和真实值的相对误差如下表所示:

表 3.1 确定性正问题在不同步长下的解与其相应的相对误差

区间个数	10×10	20×20	40×40	80×80	$160 * 160$
$w(X_0), X_0 = (0.5, 0.5)$	1.3394e-01	1.4163e-01	1.4401e-01	1.4472e-01	1.4493e-01
$err(X_0 = (0.5, 0.5))$	7.6327e-02	2.3308e-02	6.8685e-03	1.9748e-03	5.5605e-04
$w(X_0), X_0 = (0.2, 0.8)$	4.0533e-02	4.6152e-02	4.8041e-02	4.8628e-02	4.8803e-02
$err(X_0 = (0.5, 0.5))$	1.7066e-01	5.5682e-02	1.7036e-02	5.0250e-03	1.4414e-03
$w(X_0), X_0 = (0.1, 0.1)$	7.9534e-03	1.1304e-02	1.2707e-02	1.3179e-02	1.3326e-02
$err(X_0 = (0.5, 0.5))$	4.0587e-01	1.5558e-01	5.0751e-02	1.5510e-02	4.5548e-03

$F_2 = 20N$, 步长 $h_x = h_y = 0.05$ 时, $E[w(X)]$ 的函数图像为:

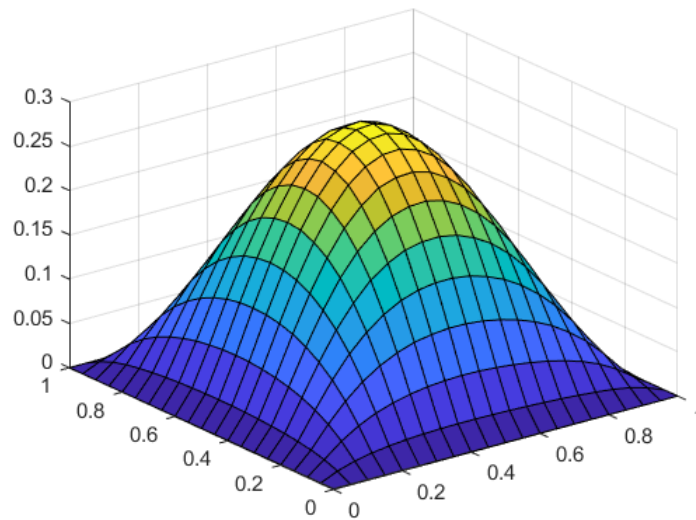


图 3.4 点外力为 20N, 实验次数 500 次后求平均的正问题函数求解图像

对于区域中每一个点算出的 D 的值为:

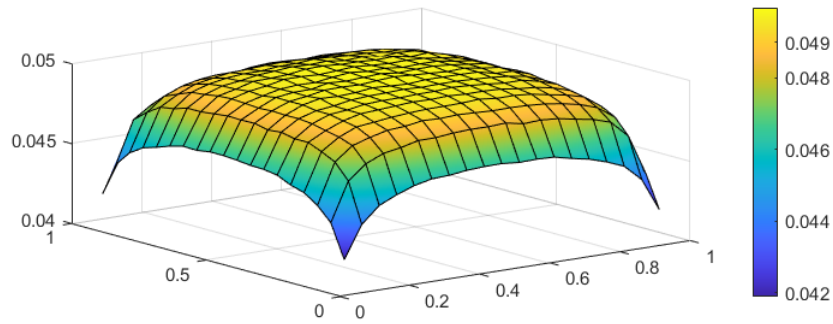


图 3.5 区域内每一点上求得的刚度系数 D (准确值为 0.05)

求解源函数 g 和 h^2 时用以参数选择的 L 曲线如下所示:

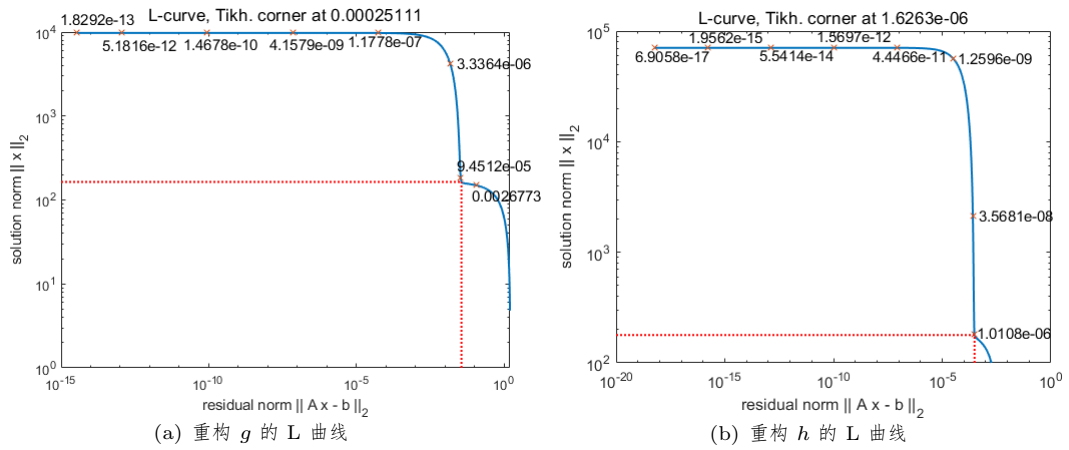


图 3.6 算例 3.1 的源函数正则化参数选取

通过图像 3.6 对正则化参数 α 和 β 进行选择, 其函数重构结果如下:

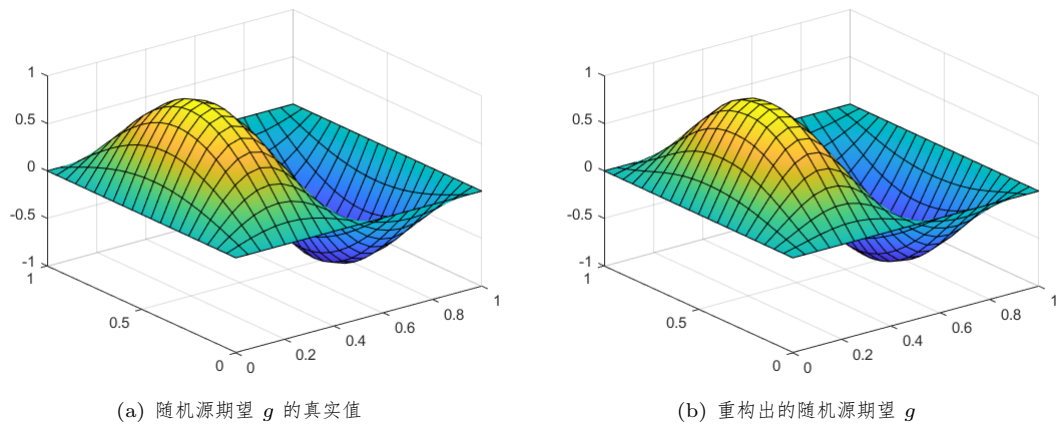
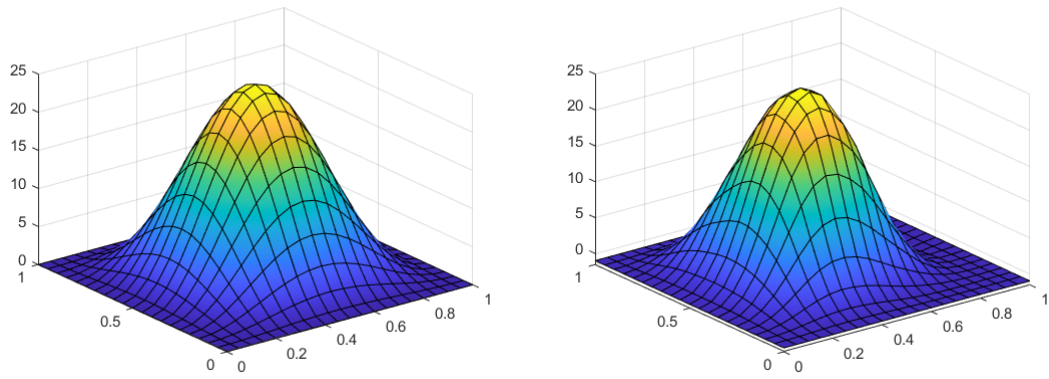


图 3.7 随机源期望 g 的重构结果

(a) 随机源方差 h^2 的真实值(b) 重构出的随机源期望 g 图 3.8 随机源方差 h^2 的重构结果

例 3.2: 我们令刚度系数 $D = 0.15$, 源函数为:

$$g = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$h = 15 \cos\left(\frac{2\pi xy}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right);$$

其余参数设置与算例 3.1 相同.

$F_1 = 10N$ 时, $\mathbf{E}[w(X)]$ 的函数图像为:

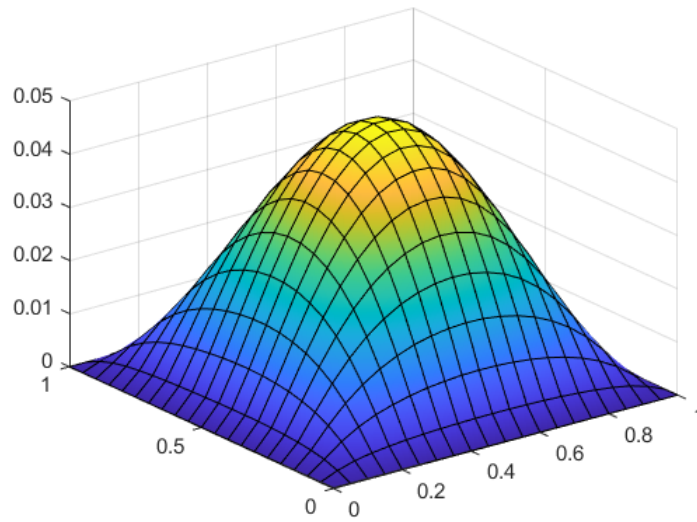


图 3.9 点外力为 10N, 实验次数 500 次后求平均的正问题函数求解图像

对于区域中每一个点算出的 D 的值为:

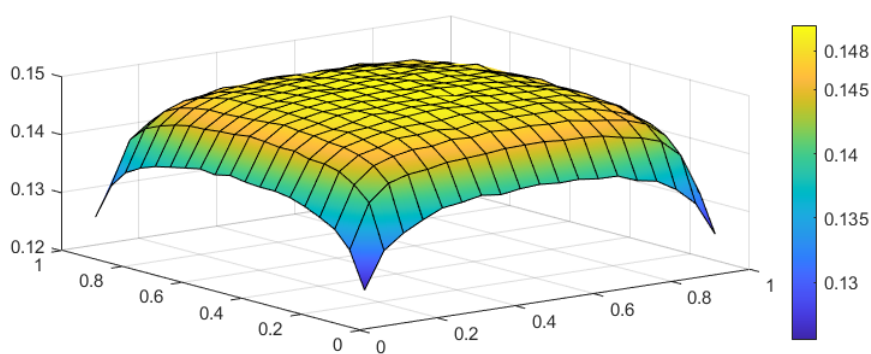


图 3.10 区域内每一点上求得的刚度系数 D (准确值为 0.15)

求解源函数 g 和 h^2 时用以参数选择的 L 曲线如下所示:

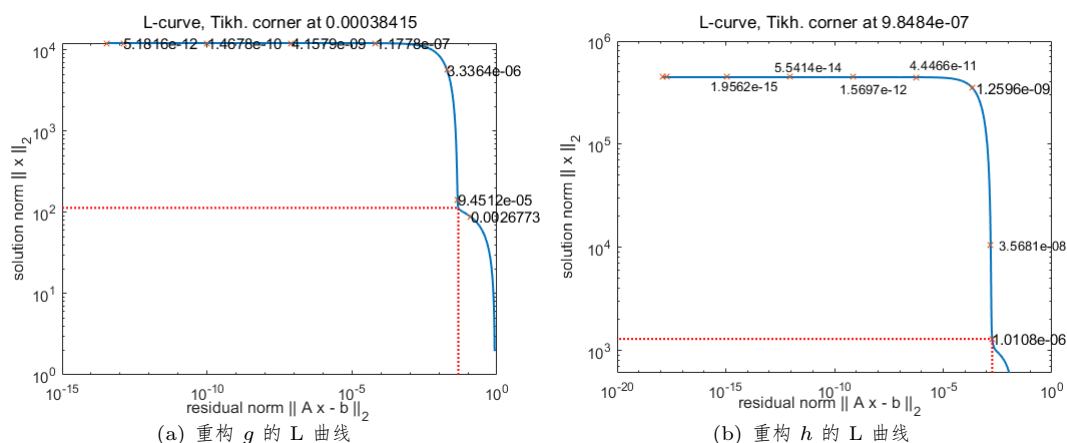


图 3.11 算例 3.1 的源函数正则化参数选取

通过图像 3.11 对正则化参数 α 和 β 进行选择, 其函数重构结果如下:

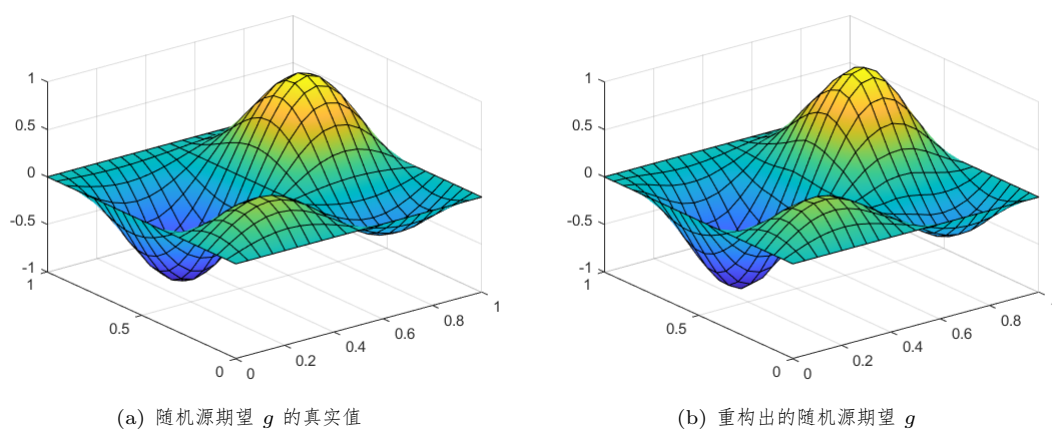
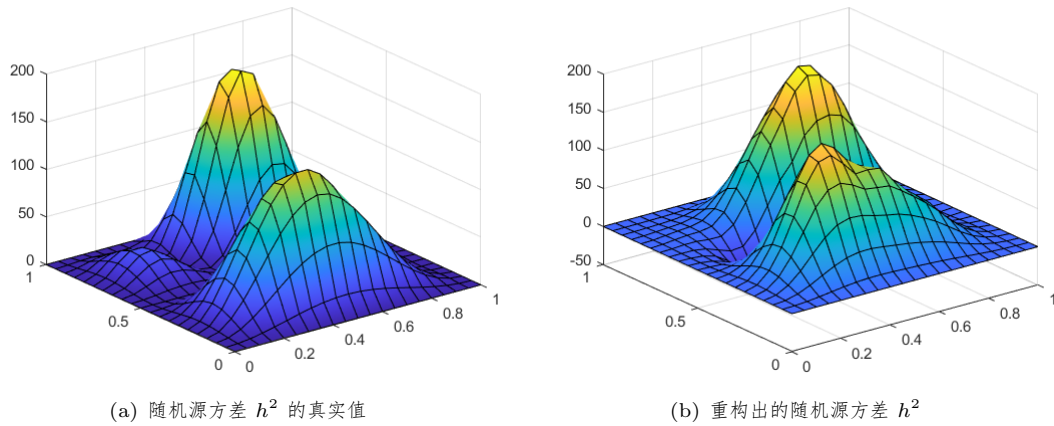


图 3.12 随机源期望 g 的重构结果

图 3.13 随机源方差 h^2 的重构结果

从上述两个算例中可以看出, 对刚度系数反演时, 越接近区域内部, 求得的数值越接近真实值, 误差越小, 而越趋于边界时, 求得的数值便越偏离真实值, 误差越大. 这是因为 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 在越接近边界的时候, 其差值就越小, 也越接近零, 从而通过求解 D 的表达式(3.32)我们知道, 在靠近边界的点求解 D 值便越不稳定, 更容易受到误差的影响, 导致求得的偏差越大.

而重构随机源函数 g 和 h^2 时, 我们发现算法对于反演随机源期望 $g(X)$ 的效果要优于对方差 $h^2(X)$ 的反演效果, 从图 3.8 和 3.13 的对比可以看出, 当随机源方差函数要更为震荡时, 其反演效果要更差一些.

3.6 本章小结

本章节我们基于简支矩形薄板形变的物理模型, 研究了二维双调和方程的随机反源问题, 并在一定的正则性和随机源构成的假设下给出了其正问题适定性的证明. 在其正问题适定的基础上, 我们给出了如何通过点外力 F 和挠度的测量, 反演其刚度系数 D 以及重构随机源的期望和方差的算法, 将后者转化为求解一类 Fredholm 积分方程, 并通过吉洪诺夫正则化来解决反问题所带来的不稳定性. 最后, 我们给出的数值算例展示了该算法的有效性和稳定性.

4 一维分数阶扩散方程随机反源问题

4.1 引言

在过去的二三十年间,越来越多的研究者开始用带有分数阶导数的微分方程,即分数阶微分方程 (FDEs) 来更形象地描述真实的物理现象. 一般来说,这一类方程可以用来刻画极度混杂的蓄水层中的未知扩散过程[47], 地下的环境问题[48], 构造复杂的粘弹性材料中的松弛现象[49], 以及带有记忆的非马尔科夫扩散过程[50] 等等.

在例如上述诸多科学和工业上的重要应用的激励下, 关于这类微分方程的反问题也在过去十几年中得到了十足的发展, 成为了一个活跃的研究领域[51–53]. 对于正问题来说, 早在 1980 年代, Wyss 等人[54,55] 就开始研究分数阶扩散方程的柯西问题和信号问题 (Signaling problems) 的解析解, 其解表示为 Fox-H 函数的形式. 而最近, 研究者们开始尤为关注时间上带有分数阶导数的扩散方程的反问题, 并且在线性的情况下, 分别在其数学理论分析和数值计算上都得到了许多成果. 一般来说, 这类线性的时间分数阶扩散方程的反问题往往是通过仅依赖时间或是仅依赖空间的数据来确定时间上或空间上的源函数[56–59], 除此之外, 也有研究者尝试利用边界上的测量数据来反演源函数[60,61]. 然而, 尽管有很多研究者在分数阶微分方程的反问题上进行了大量的研究, 人们对这类方程的随机反问题的工作却依旧很少. 目前, 有一些研究者对下面的问题做出了成果:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x)h(t) + g(x)\dot{B}^H(t), & (x, t) \in D \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial D \times [0, T], \\ u(x, 0) = 0, & x \in \bar{D} \end{cases}$$

其中 ∂_t^α 是 Caputo 导数, 参数 $\alpha \in (0, 1)$. B^H 指的是分数布朗运动, 其中赫斯特参数 $H \in (0, 1)$, 且 $\dot{B}^H$ 指的是 B^H 时间域上的形式导数. D 是一个有李普希兹连续边界 ∂D 的有界区域. f, g 是两个确定的函数, 且在 D 上紧支. 这一方程的正问题是: 在给定 f 和 g 时, 确定 u 的值. 而反问题则为: 给定 u 的一些数值, 确定未知的 f 和 g . 对于这种受时间相关的随机噪声扰动的随机源, 研究者们一般利用 Mittag-Leffler 函数来得到问题的弱解, 并且从中得到用于连接未知量和测量值的重构关系式. 在[62] 中, 若在参数满足 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ 和 $H = \frac{1}{2}$, 即白噪音的情况下, f 和 $|g|$ 被证明可以分别被终值数据 $u(x, T)$ 的均值和协方差唯一确定. 另外, 这篇文章的作者同样也指出了这一反问题并不稳定, 数据中很小的扰动都可能导致重构结果的巨大误差.[29] 中分析了这一问题的一般形式, 即参数满足 $\alpha \in (0, 1)$ 和 $H \in (0, 1)$. 这篇文

章同样从终值数据 $u(x, T)$ 中重构了 f 和 $|g|$, 也证明了这一问题解的唯一性和不稳定性.[63] 也分析了类似的随机分数阶扩散方程. 在之前的大部分研究中, 研究者们假定随机噪声来自于时间域, 这是因为如果随机源受到空间相关噪声的干扰, 其噪声的正则性可能便无法得到, 从而无法保证解的适定性存在, 导致利用 Mittag-Leffler 函数得到的弱解形式将不再适用. 因而在面对这样的随机源结构时, 我们需要利用新的方法来重构这类随机源.

在本章中, 我们将讨论以下时间分数阶一维扩散随机方程:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = F(t) \dot{W}_x, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, 1], \\ \partial_x u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 F 是满足 $F(0) = 0$ 的确定函数, 描述的随机源的扩散系数. 而 Caputo 分数阶导数 $\partial_t^\alpha u$ 由以下表达式定义:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \partial_s u(x, s) (t-s)^{-\alpha} ds$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} ds$ 是伽马函数. W_x 代表空间上的布朗运动, 满足 $\mathbf{E}[W_x W_y] = x \wedge y, \forall x, y \in (0, 1)$, 并且 $\dot{W}_x$ 是一个分布, 代表 W_x 的形式导数, 一般也被称为白噪音.

不同于直接分析研究上述随机扩散方程的初边值问题(4.1), 我们考虑将其等价转换为一个频域上的随机两点边值问题, 并且基于推导出的格林函数研究后者解的适定性和正则性. 随即通过证明(4.1)的解可以利用频域上问题的解的逆傅里叶变换等价得到, 得到问题(4.1)的适定性. 对于反问题来说, 我们可以证明扩散系数 F 的傅里叶模 $|\hat{F}|$ 能够通过频域上的等价方程的解的方差唯一确定. 但是很显然, 因为我们得到的是 $|\hat{F}|$ 而丢失了 F 傅里叶变换后的相位, 我们无法从 $|\hat{F}|$ 中唯一确定 F . 如果我们可以通过一些方法获得 F 做变换后的相位, 那么重构 F 就变得十分容易了. 这类通过傅里叶变换后的模来重构信号本身的问题被称作“相位还原[64]”, 在衍射成像, 光学和量子力学中都有很重要的应用, 并且通常是不适定且难以被解决的. 研究者们为解决这一问题提出了许多方法[65], 这些方法大致可以被分为两大类: 对 F 提出一些先验假设, 或是对 $|\hat{F}|$ 进行额外的测量. 在本章中, 我们结合自身事实, 采用后者这类方法, 并且通过随机遮罩下的相位提升 (PhaseLift) 这一方法来获得有关 $|\hat{F}|$ 的更多测量值, 从而能够唯一确定随机源扩散系数的模, 即 $|F|$.

4.2 分数阶导数及其傅里叶变换

在本节中,我们将先讨论关于 Caputo 分数阶导数的傅里叶变换形式,它是将时间分数阶随机微分方程的初边值问题(4.1)等价转换为频域中的两点边值问题的基础.

引理 4.1: 令 v 是一个单边函数, 即当 $t \leq 0$ 时有 $v(t) = 0$, 并且 v 的分数阶导数 $\partial_t^\alpha v$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 下是适定的. 那么 v 的分数阶导数的傅里叶变换满足:

$$\mathcal{F}[\partial_t^\alpha v](\omega) = (i\omega)^\alpha \hat{v}(\omega) \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

其中

$$\hat{v}(\omega) = \mathcal{F}[v](\omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} v(t) dt$$

表示 v 的傅里叶变换.

证明: 当 $v \in H^1(\mathbb{R})$ 时, 对于 $\alpha = 1$ 的情况, 上述结果显然是成立的. 接下来我们证明 $\alpha \in (0, 1)$ 的情况. 定义一个单边函数 $k_+^\alpha(t)$, $\alpha \in (0, 1)$:

$$k_+^\alpha(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

因此

$$\partial_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \partial_s v(s) (t-s)^{-\alpha} ds = (\partial_t v * k_+^\alpha)(t).$$

从而我们有:

$$\mathcal{F}[\partial_t^\alpha v](\omega) = \mathcal{F}[\partial_t v](\omega) \mathcal{F}[k_+^\alpha](\omega) = (i\omega) \hat{v}(\omega) \mathcal{F}[k_+^\alpha](\omega),$$

接下来我们证明 k_+^α 的傅里叶变换有以下形式 (cf. [66] Sec. 2.9.2):

$$\mathcal{F}[k_+^\alpha](\omega) = \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega t} t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} dt = (i\omega)^{\alpha-1}. \quad (4.2)$$

如图 4.1 所示, 令 $U_R \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通的开集, γ_R 是其封闭曲线, 显然可以注意到映射:

$$z \mapsto e^{-i\omega z} z^{-\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}$$

定义了一个 U_R 上的全纯函数. 利用柯西积分定理, 我们有:

$$\int_{\gamma_R} e^{-i\omega z} z^{-\alpha} dz = \left[\int_{1/R}^R + \int_{I_R} + \int_{iR}^{i/R} + \int_{I_{1/R}} \right] e^{-i\omega z} z^{-\alpha} dz = 0, \quad (4.3)$$

其中 $I_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ 是正向的半径为 R 的四分之一圆部分 (图 4.1 中的虚线曲线), $I_{1/R} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/R\}$ 是反向的半径为 $1/R$ 的四分之一圆部分 (图 4.1 中的实线部分).

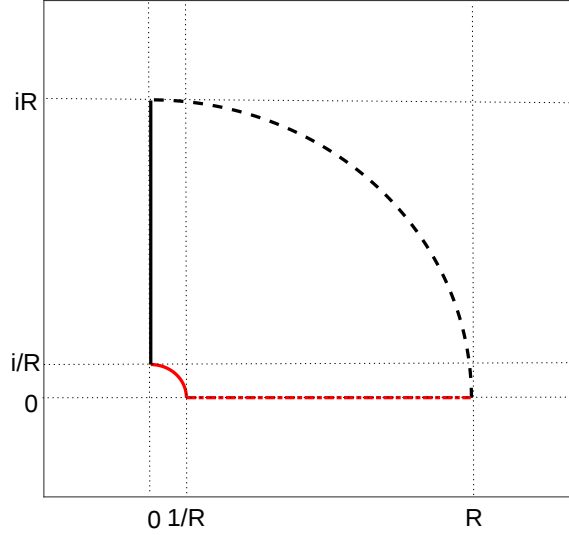


图 4.1 γ_R 的区域表示

显然, 我们有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{I_R} + \int_{I_{1/R}} \right] e^{-i\omega z} z^{-\alpha} dz = 0.$$

对(4.3)取 $R \rightarrow +\infty$ 的极限, 则有:

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\omega z} z^{-\alpha} dz + \int_{+\infty}^0 e^{-i\omega z} z^{-\alpha} dz = 0.$$

令 $i\omega z = s$, 通过计算我们有:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega z} z^{-\alpha} dz &= \int_0^{+\infty} e^{-i\omega z} z^{-\alpha} dz \\ &= (i\omega)^{\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-\alpha} ds = (i\omega)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha), \end{aligned}$$

从而再利用式(4.2)得证引理结论.

注 4.1: 注意到当 α 是分数时, $(i\omega)^\alpha$ 是一个多值函数, 在本章中, 我们定义:

$$(i\omega)^\alpha := \begin{cases} |\omega|^\alpha \exp\left(\frac{i\pi\alpha}{2} \text{sgn}(\omega)\right), & \omega \neq 0, \\ 0, & \omega = 0, \end{cases}$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数.

4.3 正问题的适定性分析

在本节中,我们将通过研究问题(4.1)等价变换后的频域问题,分析它的适定性和其弱解的正则性.

4.3.1 频域下正问题分析

因为函数 F 满足 $F(0) = 0$, 所以我们可以对 F 零延拓到负轴 $(-\infty, 0)$ 上, 将延拓后的函数定义为 $\tilde{F}$, 并且令 $\tilde{F}$ 的傅里叶变换为 $\hat{F}$. 从而我们可以将原问题(4.1)转换为以下随机微分方程的两点边值问题:

$$\begin{cases} \partial_{xx}U(x, \omega) - (i\omega)^\alpha U(x, \omega) = -\hat{F}(\omega)\dot{W}_x, & x \in D, \omega \in \mathbb{R}, \\ \partial_x U(0, \omega) = 0, \quad U(1, \omega) = 0, & \omega \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.4)$$

接下来我们推导出问题(4.4)的格林函数并且给出其适定性的分析.

4.3.1.1 频域下格林函数推导

令 $s := (i\omega)^\alpha$, 且 $g_\omega(x, y)$ 是(4.4)的格林函数, 我们对两种不同的情况分别推导其相应的格林函数.

若 $\omega \neq 0$, 则 g_ω 满足:

$$\begin{cases} \partial_{xx}g_\omega(x, y) - sg_\omega(x, y) = \delta(x - y), & x, y \in D, \\ \partial_x g_\omega(0, y) = 0, \quad g_\omega(1, y) = 0, & y \in D, \end{cases}$$

其中 δ 是狄拉克函数. 通过求解上述常系数二阶常微分方程, 我们知道 $g_\omega(x, y)$ 满足以下形式:

$$g_\omega(x, y) = \begin{cases} A_1(y)e^{-\sqrt{s}x} + B_1(y)e^{\sqrt{s}x}, & x < y, \\ A_2(y)e^{-\sqrt{s}x} + B_2(y)e^{\sqrt{s}x}, & x > y, \end{cases}$$

其中 A_i 和 $B_i, i = 1, 2$, 是待定系数方程. 利用边界条件:

$$\partial_x g_\omega(0, y) = 0, \quad g_\omega(1, y) = 0,$$

以及格林函数需要满足的连续性和跳跃性:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y^+} g_\omega(x, y) - \lim_{x \rightarrow y^-} g_\omega(x, y) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow y^+} \partial_x g_\omega(x, y) - \lim_{x \rightarrow y^-} \partial_x g_\omega(x, y) &= 1. \end{aligned}$$

随即基于注记 4.1, 我们可以得到

$$g_\omega(x, y) = \frac{e^{\sqrt{s}(x+y)} + e^{\sqrt{s}|x-y|} - e^{\sqrt{s}(2-x-y)} - e^{\sqrt{s}(2-|x-y|)}}{2\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})}, \quad x, y \in D, \quad (4.5)$$

其中

$$\sqrt{s} = (i\omega)^{\frac{\alpha}{2}} = |\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{i\pi\alpha}{4} \operatorname{sgn}(\omega)\right), \quad \Re[\sqrt{s}] = |\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) > 0.$$

这里 $\Re[\cdot]$ 和 $\Im[\cdot]$ 分别表示一个复数的实部和虚部.

若 $\omega = 0$, 则 $g_\omega(x, y)$ 退化为

$$\begin{cases} \partial_{xx}g_0(x, y) = \delta(x - y), & x, y \in D, \\ \partial_x g_0(0, y) = 0, \quad g_0(1, y) = 0, & y \in D, \end{cases}$$

同样, 我们可以求解上述两点边值问题得到:

$$g_0(x, y) = \max\{x, y\} - 1, \quad x, y \in D. \quad (4.6)$$

引理 4.2: 由式(4.5)和式(4.6), 格林函数 g_ω 满足以下估计:

$$\begin{cases} \|g_0\|_{L^2(D \times D)}^2 = \frac{1}{6} & \text{if } \omega = 0, \\ \|g_\omega\|_{L^2(D \times D)}^2 \leq C|\omega|^{-\alpha} & \text{if } \omega \neq 0, \end{cases}$$

其中 $C > 0$ 是一个与 ω 不相关的常数.

证明: 若 $\omega = 0$, 我们可以直接积分计算得到:

$$\begin{aligned} \|g_0\|_{L^2(D \times D)}^2 &= \int_0^1 \left[\int_0^x (x-1)^2 dy + \int_x^1 (y-1)^2 dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[x(1-x)^2 + \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

若 $\omega \neq 0$, 我们有:

$$\begin{aligned} \|g_\omega\|_{L^2(D \times D)}^2 &= \int_D \int_D |g_\omega(x, y)|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{|2\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{\sqrt{s}(x+y)} + e^{\sqrt{s}|x-y|} - e^{\sqrt{s}(2-x-y)} - e^{\sqrt{s}(2-|x-y|)} \right|^2 dx dy \\ &\leq \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \int_0^1 \int_0^1 \left(e^{2\Re[\sqrt{s}](x+y)} + e^{2\Re[\sqrt{s}](|x-y|)} + e^{2\Re[\sqrt{s}](2-x-y)} \right. \\ &\quad \left. + e^{2\Re[\sqrt{s}](2-|x-y|)} \right) dx dy \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \frac{e^{4\Re[\sqrt{s}]} - 1}{\Re[\sqrt{s}]} \\ &= |\omega|^{-\alpha} \frac{1}{|\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\frac{\pi\alpha}{4})} \frac{e^{4|\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\frac{\pi\alpha}{4})} - 1}{\left[e^{4|\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\frac{\pi\alpha}{4})} + 1 + 2e^{2|\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\frac{\pi\alpha}{4})} \cos(2|\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \sin(\frac{\pi\alpha}{4})) \right]} \\ &=: |\omega|^{-\alpha} h\left(|\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)\right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中 h 满足:

$$h(k) = \frac{e^{4k} - 1}{k [e^{4k} + 1 + 2e^{2k} \cos(2k \tan(\frac{\pi\alpha}{4}))]}.$$

显然, 对于所有的 $k > 0$, h 都是非负的. 接下来我们说明对于任意的 $k > 0$, 函数 $h(k)$ 都是一致有界的.

一方面, 因为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-4k}}{k [1 + e^{-4k} + 2e^{-2k} \cos(2k \tan(\frac{\pi\alpha}{4}))]} = 0,$$

因而存在一个常数 C_0 , 当 $k > C_0$ 时, 有 $h(k) < 1$, 从而我们可以得到 h 在 (C_0, ∞) 上是一致有界的. 而另一方面, 注意到

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} h(k) = 1,$$

从而我们也可以通过其光滑性得出 h 在 $(0, C_0]$ 上也是一致有界的. 因此我们有对于任意 $k > 0$, 函数 $h(k)$ 都是一致有界的. 利用这个估计, 从式(4.7)中我们可以得到存在一个独立于 ω 的常数 $C > 0$, 使得:

$$\|g_\omega\|_{L^2(D \times D)}^2 \leq h \left(|\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) \right) |\omega|^{-\alpha} \leq C |\omega|^{-\alpha},$$

从而得证引理结论.

4.3.1.2 频域下正问题适定性

基于推导出的格林函数 g_ω , 我们接下来证明随机微分方程的两点边值问题(4.4)存在唯一弱解. 我们将给出弱解的表达形式, 这将在接下来对时域上问题的分析起到重要的作用.

定理 4.1: 若 $F \in H^1(\mathbb{R}_+)$, 那么随机微分方程 (4.4) 存在唯一弱解:

$$U(x, \omega) = -\hat{F}(\omega) \int_D g_\omega(x, y) dW_y. \quad (4.9)$$

同时, 解 U 满足以下估计:

$$\mathbf{E} \|i\omega U\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(D))}^2 \leq C \|F\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2, \quad (4.10)$$

其中 $C > 0$, 是一个常数.

证明: 弱解(4.9)的存在性和唯一性可以类似于上一章 3.3 中的证明, 在此我们不做过多叙述, 我们在这里只给出对于估计(4.10)的证明.

根据 Itô 等距公式和引理 4.2, 我们有:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|\mathbf{i}\omega U\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(D))}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_D |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 \mathbf{E} \left| \int_D g_{\omega}(x, y) dW_y \right|^2 dx d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 \|g_{\omega}\|_{L^2(D \times D)}^2 d\omega \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-\alpha} |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 d\omega \\
&\leq \int_{\{\omega: |\omega| \leq 1\}} |\hat{F}(\omega)|^2 d\omega + \int_{\{\omega: |\omega| > 1\}} |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}$$

而由帕西瓦尔恒等式, 我们知道, 函数傅里叶变换前后的模不变, 从而有:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|\mathbf{i}\omega U\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(D))}^2 &\lesssim \int_{\{\omega: |\omega| \leq 1\}} |\hat{F}(\omega)|^2 d\omega + \int_{\{\omega: |\omega| > 1\}} |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 d\omega \\
&\leq \|\hat{F}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\mathbf{i}\omega \hat{F}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|F\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2,
\end{aligned}$$

其中与上一章相同, $a \lesssim b$ 代表 $a \leq Cb$, C 是一个大于零的常数, 其表达式不需要具体表示, 但在文中需要明确关系.

从而我们便得证估计(4.10).

4.3.2 时域下正问题分析

基于对频域中等价问题(4.4)的分析和估计的结果, 我们现在可以分析证明时间域上的原问题(4.1)的适定性了.

定理 4.2: 若 $F \in H^1(\mathbb{R}_+)$, 那么随机微分方程的初边值问题(4.1)存在唯一解 u 满足以下估计:

$$\mathbf{E}\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(D))}^2 \leq C\|F\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

其中 $C > 0$ 是一个常数.

证明: 令

$$\tilde{u}(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(x, \cdot)](t), \quad x \in D, \quad t \in \mathbb{R},$$

其中 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示逆傅里叶变换, 且 U 是问题(4.4)的弱解. 我们定义:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t)|_{t \geq 0}. \quad (4.11)$$

为了说明问题(4.1)的解的存在性, 我们证明上述(4.11)定义的 u 即为(4.1)的解.

注意到

$$\tilde{u}(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(x, \cdot)](t) = - \int_{-\infty}^t \tilde{F}(s) \mathcal{F}^{-1} \left[\int_D g_\omega(x, y) dW_y \right] (t - s) ds,$$

正如 4.3 开头定义的那样, $\tilde{F}$ 表示 F 在 $(-\infty, 0)$ 做零延拓之后的函数. 因此, 当 $t \leq 0$ 时有 $\tilde{u} = 0$, 即 $\tilde{u}$ 是一个单边函数. 从而我们有:

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0) = 0. \quad (4.12)$$

另外, 利用帕西瓦尔恒等式和定理 4.1, 我们知道 $\partial_t \tilde{u} \in L^2(\Omega; L^2(\mathbb{R}; L^2(D)))$ 满足:

$$\mathbf{E} \|\partial_t \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(D))}^2 = \mathbf{E} \|\mathrm{i}\omega U\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(D))}^2 \leq C \|F\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2, \quad (4.13)$$

这也证明了 $\tilde{u}$ 关于 t 的 Caputo 分数阶导数是适定的.

再关于 ω 对式(4.4)两边做逆傅里叶变换, 利用 $\tilde{u}$ 满足 $u = \tilde{u}|_{\mathbb{R}_+}$ 的关系式, 以及单边函数 $\tilde{u}$ 满足引理 4.1 的要求, 我们有:

$$\begin{cases} \partial_{xx} u(x, t) - \partial_t^\alpha u(x, t) = -F(t) \dot{W}_x, & x \in D, t \in \mathbb{R}_+, \\ \partial_x u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (4.14)$$

我们将式(4.14)和初值条件(4.12)相结合, 则可以得出式(4.11)中定义的 u 即为满足估计(4.13)的问题(4.1)的解.

而问题(4.1)的解的唯一性则可以直接从时域问题(4.1)和频域问题(4.4)的等价性中得出, 其适定性也可以直接利用我们分析(4.4)时的定理(4.1)得到.

4.4 反问题分析及求解算法

在本节, 我们将重点讨论(4.1)的反问题, 即如何通过测量端点处一段时间的波场 $u(0, t)$ 来重构扩散系数 F .

4.4.1 频域下随机源模重构

首先我们考虑如何重构 F 傅里叶变换之后的模, 并且分析反演这一问题的唯一性和存在的不确定性.

4.4.1.1 唯一性分析

通过式(4.9)的形式, 我们知道解 $U(x, \omega)$ 在 $x = 0$ 处的均值和方差满足:

$$\mathbf{E}[U(0, \omega)] = 0,$$

以及

$$\mathbf{V}[U(0, \omega)] = \mathbf{E}[|U(0, \omega)|^2] = |\hat{F}(\omega)|^2 \int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy, \quad (4.15)$$

这里通过式(4.6)和(4.5)我们知道: 若 $\omega \neq 0$, 有

$$g_\omega(0, y) = \frac{e^{\sqrt{s}y} - e^{\sqrt{s}(2-y)}}{\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})}; \quad y \in D \quad (4.16)$$

若 $\omega = 0$, 则有

$$g_0(0, y) = y - 1. \quad y \in D$$

引理 4.3: 对于任意固定的 $\omega \in \mathbb{R}$, 有以下估计:

$$\int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy > 0.$$

证明: 对于 $\omega = 0$, 简单通过计算, 我们有:

$$\int_D |g(0, y)|^2 dy = \int_0^1 (y - 1)^2 dy = \frac{1}{3}.$$

而对于 $\omega \neq 0$, 则有:

$$\begin{aligned} \int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy &= \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \int_0^1 \left| e^{\sqrt{s}y} - e^{\sqrt{s}(2-y)} \right|^2 dy \\ &= \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \int_0^1 \left[e^{2\Re[\sqrt{s}]y} + e^{2\Re[\sqrt{s}](2-y)} - 2e^{2\Re[\sqrt{s}]} \cos(2\Im[\sqrt{s}](1-y)) \right] dy \\ &= \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \left(\frac{e^{4\Re[\sqrt{s}]} - 1}{2\Re[\sqrt{s}]} - \frac{e^{2\Re[\sqrt{s}]} \sin(2\Im[\sqrt{s}])}{\Im[\sqrt{s}]} \right) \end{aligned}$$

因为我们知道对于任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$, 所以:

$$\begin{aligned} \int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy &\geq \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \left(\frac{e^{4\Re[\sqrt{s}]} - 1}{2\Re[\sqrt{s}]} - 2e^{2\Re[\sqrt{s}]} \right) \\ &=: \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} l_1(2\Re[\sqrt{s}]), \end{aligned}$$

其中 l_1 满足:

$$l_1(k) = \frac{e^{2k} - 1}{k} - 2e^k, \quad k > 0.$$

由此结论, 我们只需证明对于任意的 $k > 0$, 有 $l_1(k) > 0$ 即可. 注意到:

$$l_1'(k) = \frac{(2k-1)e^{2k} - 2k^2e^k + 1}{k^2} =: \frac{l_2(k)}{k^2},$$

其中 $l_2(k) = (2k-1)e^{2k} - 2k^2e^k + 1$, 显然可以发现 $l_2(k) > 0$. 因此对于任意的 $k > 0$ 有 $l_1'(k) > 0$. 事实上, 我们注意到:

$$l_2'(k) = (4ke^k - 2k^2 - 4k)e^k > (4k(1+k) - 2k^2 - 4k)e^k > 0 \quad \forall k > 0,$$

从而有:

$$l_2(k) > \lim_{k \rightarrow 0^+} l_2(k) = 0.$$

因此 l_1 在 $k > 0$ 时是单调递增的, 满足:

$$l_1(k) > \lim_{k \rightarrow 0^+} l_1(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{2k} - 1}{k} - 2e^k \right] = 0,$$

从而我们的引理得证.

定理 4.3: 若 $F \in H^1(\mathbb{R}_+)$, 则傅里叶模 $|\hat{F}(\omega)|$ 可以被边界数据 $\mathbf{V}[U(0, \omega)]$ 唯一确定.

证明: 利用式(4.15)和引理 4.3, 我们可以直接得到:

$$|\hat{F}(\omega)| = \left(\frac{\mathbf{V}[U(0, \omega)]}{\int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (4.17)$$

从而保证了重构的唯一性.

4.4.1.2 稳定性分析

由定理 4.3, 我们知道虽然反问题存在唯一解, 但是解却缺乏稳定性, 因为当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 重构关系式(4.17)的分母 $\int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy$ 将会趋于零. 我们将在下面的定理中给出具体的估计.

定理 4.4: 对于任意固定的 $\omega \neq 0$, 格林函数 $g_\omega(0, y)$ 满足以下估计:

$$\int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy \lesssim |\omega|^{-\alpha}.$$

证明: 由(4.16), 我们有:

$$\begin{aligned} \int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy &= \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \int_0^1 \left| e^{\sqrt{s}y} - e^{\sqrt{s}(2-y)} \right|^2 dy \\ &\leq \frac{2}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \int_0^1 \left(\left| e^{\sqrt{s}y} \right|^2 + \left| e^{\sqrt{s}(2-y)} \right|^2 \right) dy \\ &= \frac{2}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \int_0^1 \left(e^{2\Re[\sqrt{s}]y} + e^{2\Re[\sqrt{s}](2-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{|\sqrt{s}(1 + e^{2\sqrt{s}})|^2} \frac{e^{4\Re[\sqrt{s}]} - 1}{\Re[\sqrt{s}]} \end{aligned}$$

再经由与(4.7)相同的估计, 可以得到:

$$\int_D |g_\omega(0, y)|^2 dy \leq |\omega|^{-\alpha} h \left(|\omega|^{\frac{\alpha}{2}} \cos \left(\frac{\pi\alpha}{4} \right) \right) \lesssim |\omega|^{-\alpha},$$

从而得证该定理.

4.4.2 时域下随机源重构 (相位还原)

在本节中, 我们将讨论相位还原这一问题, 也就是我们要针对如何利用重构得来的 $|\hat{F}|$ 在数值上重构 $|F|$. 前者是时域下随机扩散方程的扩散系数的模, 而后者是频域下扩散系数 $\hat{F}$ 的模.

为了更为具体地介绍相位还原的数值方法, 我们将先概括地描述数值上相位还原这一问题, 并且介绍一种以增加测量数值为基础的相位还原方法: 相位提升 (PhaseLift). 这也将是本章中我们选择重构 $|F|$ 的具体方法.

4.4.2.1 离散的相位还原问题介绍

令 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^\top \in \mathbb{C}^N$ 是一组长度为 N 的信号, 并且 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^\top \in \mathbb{C}^N$ 是这组信号的 N 点离散傅里叶变换 (DFT). 令 $\mathbf{f}^{(m)}$ 是这个 N 点离散傅里叶变换矩阵的第 m 列的共轭, 也就是:

$$\mathbf{f}^{(m)} = \left(f_1^{(m)}, \dots, f_N^{(m)}\right)^\top := \left(1, e^{i\frac{2\pi(m-1)}{N}}, \dots, e^{i\frac{2\pi(m-1)(N-1)}{N}}\right)^\top. \quad (4.18)$$

那么显然我们有 $y_m = \langle \mathbf{f}^{(m)}, \mathbf{x} \rangle$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是复内积, 满足:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{n=1}^N \overline{x_n} y_n.$$

那么离散的相位还原问题有如下描述:

$$\begin{aligned} &\text{找到} \quad \mathbf{x} \\ &\text{使得} \quad z_m := |\langle \mathbf{f}^{(m)}, \mathbf{x} \rangle|^2, \quad m = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.19)$$

这一问题最先由 Gerchberg 在 1972 年被研究 [67], 并且可以被描述成下述的最小二乘问题:

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{m=1}^M (z_m - |\langle \mathbf{f}^{(m)}, \mathbf{x} \rangle|^2)^2.$$

早期关于这类相位还原的优化方法大都基于交替投影, 这一算法要求过采样, 也就是选取多于 N 个的 M 个点进行离散傅里叶变换, 并且试图利用随机初始化和通过在时域和傅里叶变换后的频域两者不断地投影迭代中施加两个区域的约束来最小化上述非凸的目标. 然而, 因为这个迭代投影是在凸集和非凸集之间进行的, 因此解通常只能收敛到局部最小值, 这便导致即使是在确定的有导向的设定下, 这一算法的重构能力依旧十分有限.

而近期的解决相位还原问题不适定性的思想大致可以分为两类: (1) 利用先验信息来进行模型优化; (2) 进行更多的关于模的测量, 获得更多的数据. 前者旨在通过假

设信号的一些鲜艳信息来减少未知数的数量, 例如对支撑集的约束[68], 对正性和实值的要求[69], 或者是对信号稀疏性的要求[70] 等等. 而后者则可以通过更多方式完成, 包括使用遮罩[71], 光栅[72], 倾斜照明[73] 或者是利用短时间段, 相邻部分重叠的方法, 增加傅里叶变换的模的测量数据[74].

4.4.2.2 相位提升 (PhaseLift) 算法介绍

相位提升这一算法基于半正定规划方法, 是解决相位还原问题的有效途径. 已经表明, 相位提升方法可以为各种二次约束问题给出稳健的解. 由于相位还原的结果受二次约束, 因此我们可以采用相位提升方法来处理我们的反问题.

这种方法主要分成两个部分: 多重结构化的投射和维度提升. 为了使本章自成一统, 我们简要介绍该方法的这两个部分, 更为详细的信息可以在[75] 中找到.

首先我们对多重结构化的投射这一部分进行阐述. 若我们需要还原的信号为 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^\top \in \mathbb{C}^N$, 并且假设进行投射之后的信号为 $\{w_n x_n\}_{n=1, \dots, N}$, 这里投射方案 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)^\top \in \mathbb{C}^N$ 已知且由研究者自己选择. 进行投射之后的信号的傅里叶变换模也是可以获得的. 在实践中, 实现这类投射的方法有许多种, 例如遮罩, 光栅和斜向照明. 一般来说, 为了解的稳定性, 我们优先采用需要较少的投射方案的算法来进行相位还原.

接下来我们介绍维度提升这一部分. 基于上面提到的投射方案 $\mathbf{w}$, 假设我们有以下形式的二次测量:

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)^\top := (|\langle \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{x} \rangle|^2, \dots, |\langle \mathbf{a}^{(N)}, \mathbf{x} \rangle|^2)^\top,$$

其中 $\mathbf{a}^{(m)}$ 可以基于投射方案 $\mathbf{w}$ 选取, 满足:

$$\mathbf{a}^{(m)} = \left(f_1^{(m)} w_1, \dots, f_N^{(m)} w_N \right)^\top,$$

其中 $\mathbf{f}^{(m)} = \left(f_1^{(m)}, \dots, f_N^{(m)} \right)^\top$ 为式(4.18)中所定义的离散傅里叶变换矩阵中的共轭列. 这样一来, 相位还原问题就被等价转换为了下面这种可行性问题:

$$\begin{aligned} &\text{找到} \quad \mathbf{x} \\ &\text{使得} \quad b_m := |\langle \mathbf{a}^{(m)}, \mathbf{x} \rangle|^2, \quad m = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

相位提升这一算法的核心即为利用变换 $\mathbf{X} = \mathbf{x} \mathbf{x}^*$ 将需要求解的信号 $\mathbf{x}$ 嵌入到更高维度的空间, 即将信号 $\mathbf{x}$ 提升为一个秩一的矩阵 $\mathbf{X}$. 令 $\mathbf{A}^{(m)} := \mathbf{a}^{(m)} (\mathbf{a}^{(m)})^*$, 我们有:

$$b_m = |\langle \mathbf{a}^{(m)}, \mathbf{x} \rangle|^2 = \mathbf{x}^* \mathbf{a}^{(m)} (\mathbf{a}^{(m)})^* \mathbf{x} = \text{Tr}(\mathbf{A}^{(m)} \mathbf{x} \mathbf{x}^*) = \text{Tr}(\mathbf{A}^{(m)} \mathbf{X}), \quad (4.20)$$

其中 $\text{Tr}(\cdot)$ 表示一个矩阵的迹. 若 $\mathbf{X}$ 是一个半正定矩阵, 即满足 $\mathbf{X} \succeq 0$, 则设 $\mathcal{A}$ 是一个作用在其上的线性算子, 将其映射到:

$$\mathcal{A}(\mathbf{X}) := (\text{Tr}(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{X}), \dots, \text{Tr}(\mathbf{A}^{(N)}\mathbf{X}))^\top. \quad (4.21)$$

基于上述标记, 相位还原问题也就等价于:

$$\begin{aligned} &\text{找到} \quad \mathbf{X} \\ &\text{使得} \quad \mathcal{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{z}, \\ &\quad \mathbf{X} \succeq 0, \\ &\quad \text{rank}(\mathbf{X}) = 1, \end{aligned} \quad (4.22)$$

其中 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^\top$ 是由(4.19)中定义的测量数据. 因此, 相位还原问题便简化为找到一个秩一的半正定矩阵 $\mathbf{X}$, 并且使其满足一系列仿射测量约束. 不失等价性地, 我们可以将上述可行性问题转化为一个最小化问题, 即为:

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad \text{rank}(\mathbf{X}) \\ &\text{使得} \quad \mathcal{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{z}, \\ &\quad \mathbf{X} \succeq 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

上述两种问题的提法(4.22)和(4.23)的等价性是显然的, 因为根据式(4.20), $\mathbf{b} = \mathcal{A}(\mathbf{x}\mathbf{x}^*)$, 且存在秩一的解. 那么问题(4.23)求得的秩最小化一定是满足问题(4.22)秩一的解. 在得到问题(4.23)的解后, 我们需要将这个秩一解 $\mathbf{X}$ 分解为 $\mathbf{x}\mathbf{x}^*$, 从而真正得到我们需要的相位还原的解. 因此, 我们的反问题便等价地变为了在一个半正定锥的仿射切片上的秩最小化问题. 因而变为了一个低秩矩阵补全或矩阵回复问题. 这也是近年来备受关注的经典优化问题之一[76,77].

然而, 我们知道秩最小化问题(4.23)是一个 NP 难问题, 因此, 我们会将迹范数看做为秩泛函(4.23)的凸的替代[78]. 从而, 我们得到了一个半正定规划问题:

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad \text{Tr}(\mathbf{X}) \\ &\text{使得} \quad \mathcal{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{z}, \\ &\quad \mathbf{X} \text{ 为 正定的厄米特矩阵.} \end{aligned} \quad (4.24)$$

这个半正定规划问题(4.24)是一个凸的, 且存在许多数值求解器的优化问题. 其中著名的求解方法之一便是 Nesterov 加速的一阶方法[79]. 我们在本节中仅阐述(4.23)和问题(4.24)之间的关系, 更多具体的细节可以在[76,77] 中找到.

4.4.3 数值算法

在本章中,所有的数值算法都基于对 MATLAB 上的一阶半正定锥求解器 (TFOCS) [80] 的使用和优化实现的. TFOCS 是搭载在 MATLAB 上文件库, 主要用来为各种凸优化问题 (包括文中的半正定规划问题(4.24)) 构建更为简便的最优一阶方法.

为了简单说明我们优化问题(4.24)的方法, 下面我们将简要介绍一类最优一阶方法的规定和实现, 以解决以下一般凸优化问题:

$$\text{minimize } \phi(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}), \quad (4.25)$$

其中 $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑且凸的, $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 也是凸的.

考虑一类基于有广义投影的迭代来解决问题(4.25)的一阶方法 (cf. [80]):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left[g(\mathbf{x}_k) + \langle \nabla g(\mathbf{x}_k), \mathbf{x} - \mathbf{x}_k \rangle + h(\mathbf{x}) + \frac{1}{2t_k} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^2 \right], \quad (4.26)$$

其中 $\|\cdot\|$ 是选定的范数, t_k 是步长. 若 t_k 有界且不接近零, $g(\mathbf{x}_{k+1})$ 满足以下上界:

$$g(\mathbf{x}_{k+1}) \leq g(\mathbf{x}_k) + \langle \nabla g(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \rangle + \frac{1}{2t_k} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|^2, \quad (4.27)$$

那么(4.26)便具有全局收敛性. 其中, $g(\mathbf{x}_{k+1})$ 对上界的要求可以通过对 g 的梯度满足广义的李普希兹条件得到, 即 ∇g 对任意属于 ϕ 的区域的 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 满足

$$\|\nabla g(\mathbf{x}) - \nabla g(\mathbf{y})\|_* \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (4.28)$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 是范数 $\|\cdot\|$ 的对偶范数, 满足:

$$\|g\|_* = \sup\{\langle h, g \rangle : \|h\| \leq 1\}.$$

那么(4.27)的有界性则可以在假设(4.28)下对任意的 $t_k \leq L^{-1}$ 都得到满足. 从而在 $O(L/\epsilon)$ 次迭代下有收敛:

$$\left| \phi(\mathbf{x}_k) - \inf_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \right| \leq \epsilon$$

基于式(4.26), 上述收敛阶可以通过许多常见的算法成立, 例如向前向后算法或是近端梯度下降法 [81].

最优或是加速的一阶方法能够将迭代次数的界限优化到 $O(\sqrt{L/\epsilon})$, 这一方法也在过去几十年间被许多学者所研究 (例如 [82] 中). 而 TFOCS 基于 Nesterov 在 [79] 中描述的方法的变体实现并改进了了一系列最优一阶方法. 其中一种被称为 Auslender 和 Teboulle 方法 (AT 方法) 的算法可以大致描述为以下形式:

Algorithm 2 Auslender 和 Teboulle 方法 [83]

Require: $\mathbf{x}_0 \in \phi$

- 1: $\bar{\mathbf{x}}_0 \leftarrow \mathbf{x}_0, \theta_0 \leftarrow 1$
- 2: for $k = 0, 1, 2, \dots$ do
- 3: $\mathbf{y}_k \leftarrow (1 - \theta_k)\mathbf{x}_k + \theta_k\bar{\mathbf{x}}_k$
- 4: $\bar{\mathbf{x}}_{k+1} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{x}} \langle \nabla g(\mathbf{y}_k), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2}\theta_k L \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k\|^2 + h(\mathbf{x})$
- 5: $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow (1 - \theta_k)\mathbf{x}_k + \theta_k\bar{\mathbf{x}}_k + 1$
- 6: $\theta_{k+1} \leftarrow \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4/\theta_k^2}}$ $\triangleright \theta_k$ 为加速参数
- 7: end for

4.5 数值算例及结果分析

在本节, 我们将讨论求解本章提出的随机正问题和随机反源问题的数值求解方法, 并且给出数值算例, 用以说明算法的有效性和稳定性.

4.5.1 正问题数值离散

如上一章 3.5 节相同, 为了避免正问题求解用到的源和反问题得到的结果“正好”一样, 我们需要利用传统的数值计算方法来求解正问题. 在这里, 我们用有限差分法来离散这一随机微分方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = F(t)\dot{W}_x, \\ u(x, 0) = 0, \\ \partial_x u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \end{cases}$$

其中自变量区域为 $(0, 1) \times (0, T), T > 0$.

定义时间和空间的离散区间和节点:

$$t_n = nh_t, \quad n = 0, 1, \dots, N_t, \quad x_i = ih_x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x,$$

其中 $h_t = T/N_t, h_x = 1/N_x$. 令 u_i^n 为 $u(x_i, t_n)$ 的数值近似, (x_i, t_n) 上的分数阶导数

$\partial_t^\alpha u$ 可以在数值上近似为:

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha u(x_i, t_n) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_n} \frac{\partial u(x_i, s)}{\partial s} \frac{1}{(t_n - s)^\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial u(x_i, s)}{\partial s} \frac{1}{(t_n - s)^\alpha} ds \\
&\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^n \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h_t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - s)^{-\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{h_t^\alpha} \frac{1}{1-\alpha} \sum_{j=1}^n (u_i^j - u_i^{j-1}) [(n-j+1)^{1-\alpha} - (n-j)^{1-\alpha}] \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{h_t^\alpha} \left[u_i^n + \sum_{j=1}^{n-1} u_i^j ((n-j+1)^{1-\alpha} - 2(n-j)^{1-\alpha} + (n-j-1)^{1-\alpha}) \right. \\
&\quad \left. - u_i^0 (n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}) \right].
\end{aligned}$$

而点 (x_i, t_n) 上的二阶导数 $\partial_{xx} u$ 则可以利用中心差分方法近似为:

$$\partial_{xx} u(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h_x^2}.$$

点 $x = x_i$ 上的白噪声 $\dot{W}_x$ 可以由增量 $[W(x_{i+1}) - W(x_i)]/h_x$ 近似定义, 其中, 布朗运动 W 满足:

$$\frac{W(x_{i+1}) - W(x_i)}{h_x} \stackrel{d}{=} \frac{\xi_i}{\sqrt{h_x}},$$

$a \stackrel{d}{=} b$ 表示随机变量 a 和 b 有同样的概率分布, $\{\xi_i\}_{i=0}^{N_x-1}$ 是一族独立同分布的标准正态分布的随机变量, 表示为 $\xi_i \sim N(0, 1)$.

利用上述数值近似, 我们有以下离散:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h_t^\alpha} \left[u_i^n + \sum_{j=1}^{n-1} u_i^j ((n-j+1)^{1-\alpha} - 2(n-j)^{1-\alpha} + (n-j-1)^{1-\alpha}) \right. \\
&\quad \left. - u_i^0 (n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}) \right] - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h_x^2} = F(t_n) \frac{W(x_{i+1}) - W(x_i)}{h_x} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

令 $\sigma = \frac{h_x^2}{\Gamma(2-\alpha)h_t^\alpha}$, 上述离散(4.29)可以写成:

$$\begin{aligned}
& -u_{i+1}^n + (\sigma + 2)u_i^n - u_{i-1}^n \\
& = h_x F(t_n)[W(x_{i+1}) - W(x_i)] - \sigma u_i^0 (n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}) \\
& \quad - \sigma \sum_{j=1}^{n-1} u_i^j ((n-j+1)^{1-\alpha} - 2(n-j)^{1-\alpha} + (n-j-1)^{1-\alpha}) \\
& = h_x F(t_n)[W(x_{i+1}) - W(x_i)] \\
& \quad - \sigma \sum_{j=1}^{n-1} u_i^j ((n-j+1)^{1-\alpha} - 2(n-j)^{1-\alpha} + (n-j-1)^{1-\alpha}) \\
& =: G_i^n
\end{aligned} \tag{4.30}$$

其中 $n = 1, \dots, N_t$ 和 $i = 0, 1, \dots, N_x - 1$, 并且利用初值条件:

$$u_i^0 = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N_x.$$

另外, 由(4.1)中的边界条件 $\partial_x u(0, t) = 0$, 且

$$\partial_x u(0, t) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{u(h_x, t) - u(-h_x, t)}{2h_x} = 0,$$

我们定义:

$$u_{-1}^n := u_1^n \quad \forall n = 0, \dots, N_t.$$

因此, 当 $i = 0$ 时, 式(4.30)则有:

$$-2u_1^n + (\sigma + 2)u_0^n = G_0^n \quad \forall n = 1, \dots, N_t. \tag{4.31}$$

再由由(4.1)中的边界条件 $u(1, t) = 0$, 则有:

$$u_{N_x}^n = 0 \quad \forall n = 0, \dots, N_t,$$

因此对于 $i = N_x - 1$, 离散方程(4.30)变为:

$$(\sigma + 2)u_{N_x-1}^n - u_{N_x-2}^n = G_{N_x-1}^n \quad \forall n = 1, \dots, N_t. \tag{4.32}$$

结合(4.30)和边界条件(4.31)-(4.32), 我们可以将数值离散归纳为下述矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \sigma + 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \sigma + 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \sigma + 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \sigma + 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \sigma + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N_x-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0^n \\ G_1^n \\ G_2^n \\ \vdots \\ G_{N_x-1}^n \end{bmatrix} \quad \forall n = 1, \dots, N_t. \tag{4.33}$$

4.5.2 相位提升 (PhaseLift) 算法应用

对于问题(4.1), 扩散系数傅里叶变换后的模 $|\hat{F}|$ 可以通过将 $u(0, t)$ 傅里叶变换后的方差 $\mathbf{V}[U(0, \omega)]$, 利用关系式(4.15)进行重构得到. 而为了数值上解决相位还原问题而得到我们想要的 $|F|$, 即在离散的节点上唯一还原源函数 $\mathbf{f} := (F(t_1), \dots, F(t_{N_t}))^\top$, 我们需要获得更多的测量数据, 并利用 4.4.2 节中介绍的带有遮罩的相位提升办法.

令 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 是两个遮罩, 其中 $\mathbf{M}_1$ 是 $N_t \times N_t$ 恒等矩阵, $\mathbf{M}_2$ 是随机二元矩阵, 即为 $N_t \times N_t$ 的对角阵, 其对角元随机选取 0 或是 1.

利用上述两个遮罩, 将其作为多结构投射方案 $\mathbf{M}_i \mathbf{f}$, 我们则可以得到总共为 $2N_t$ 个测量数据 $\mathcal{A}(\mathbf{f} \mathbf{f}^*)$, 其中算子 $\mathcal{A}$ 如式(4.21)中所定义, 且 $N = 2N_t$. 与算子 $\mathcal{A}$ 相关的向量 $\{\mathbf{a}^{(m)}\}_{m=1}^{2N_t}$ 满足:

$$\mathbf{a}^{(m)} = \begin{cases} \mathbf{M}_1 \mathbf{f}^{(m)}, & m = 1, \dots, N_t, \\ \mathbf{M}_2 \mathbf{f}^{(m-N_t)}, & m = N_t + 1, \dots, 2N_t, \end{cases}$$

且 $\mathbf{f}^{(m)}$ 的表达式由(4.18)给出.

为了还原源函数 $\mathbf{f}$, 我们需要求解基于目标泛函给出的凸优化问题, 正如 4.4.3 节中所述:

$$\phi(\mathbf{f}) = g(\mathbf{f}) + h(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathcal{A}(\mathbf{f} \mathbf{f}^*)\|_2^2 + \lambda \text{Tr}(\mathbf{f} \mathbf{f}^*) + h(\mathbf{f}),$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 是欧几里得范数, $\lambda > 0$ 是正则化参数, 以及 h 为指示函数, 满足:

$$h(\mathbf{f}) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \mathbf{f} \mathbf{f}^* \text{ 是厄米特正定的,} \\ \infty & \text{其他情况.} \end{cases}$$

其中, $\mathbf{b}$ 是傅里叶二次模, 是通过带有遮罩的源 $[(\mathbf{M}_1 \mathbf{f})^\top, (\mathbf{M}_2 \mathbf{f})^\top]^\top$ 得到的 $x = 0$ 处的 $\{u_0^n\}_{n=1}^{2N_t}$ 的数据. 具体来讲, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{2N_t})^\top$ 满足以下表达式:

$$b_n = \frac{\mathbf{V}[U_0^n]}{\int_0^1 |g_{\omega_n}(0, y)|^2 dy}, \quad n = 1, \dots, 2N_t,$$

其中 $(U_0^1, \dots, U_0^{2N_t})^\top$ 是 $(u_0^1, \dots, u_0^{2N_t})^\top$ 的 $2N_t$ 点离散傅里叶变换, 且 $\omega_n = 2\pi n h_t / N_t$.

我们将利用 Auslender 和 Teboulle 方法, 即算法(2)来求解上述问题. 且当我们的重构结果 $\tilde{\mathbf{f}}$ 的相对误差小于固定容差时迭代终值, 即 $\|\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{f}}^*) - \mathbf{b}\|_2 \leq 10^{-6} \|\mathbf{b}\|_2$. 注意到解 $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{N_t})^\top$ 只在模层面上存在唯一性, 即当 c 是一个复的标量, 满足 $|c| = 1$ 时, $(|c \tilde{f}_1|^2, \dots, |c \tilde{f}_{N_t}|^2)^\top = (|F(t_1)|^2, \dots, |F(t_{N_t})|^2)^\top$ 是唯一的. 所以当然我们的随机源函数 $F(t)$ 是一个非负的实函数时, 我们重构的解将是唯一的. 因此, 在接下来的三个数值实例中, 我们都将反演源函数的绝对值 $|F|$.

首先我们给出正问题求解的收敛速度, 即对于问题

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = F(t), x \in [0, 1], t \in [0, T] \\ \partial_x u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

当 $T = 4\pi$, $F(t) = \sin(t) \exp(-t/6)$ 时, 我们对 $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 四种情况下时间方向上不同步长的 $u(0, t)$ 进行展示, 其中 t 分别为 $\pi/200, 2\pi$, 和 4π .

表 4.1 $\alpha = 0.2$ 时确定性正问题解 $u(0, t)$ 在不同步长下的结果

区间个数	50	100	200	400	800	600
$u(0, t), t = \pi/200$	8.3242e-02	8.3170e-02	8.3158e-02	8.3156e-02	8.3155e-02	8.3155e-02
$u(0, t), t = 2\pi$	-8.3764e-03	-8.3981e-03	-8.4019e-03	-8.4024e-03	-8.4024e-03	-8.4024e-03
$u(0, t), t = 4\pi$	-2.7116e-03	-2.7182e-03	-2.7193e-03	-2.7194e-03	-2.7194e-03	-2.7194e-03

表 4.2 $\alpha = 0.4$ 时确定性正问题解 $u(0, t)$ 在不同步长下的结果

区间个数	50	100	200	400	800	600
$u(0, t), t = \pi/200$	7.5606e-02	7.4956e-02	7.4728e-02	7.4654e-02	7.4629e-02	7.4621e-02
$u(0, t), t = 2\pi$	-1.8204e-02	-1.8317e-02	-1.8346e-02	-1.8354e-02	-1.8356e-02	-1.8356e-02
$u(0, t), t = 4\pi$	-6.2447e-03	-6.2832e-03	-6.2931e-03	-6.2958e-03	-6.2965e-03	-6.2967e-03

表 4.3 $\alpha = 0.6$ 时确定性正问题解 $u(0, t)$ 在不同步长下的结果

区间个数	50	100	200	400	800	600
$u(0, t), t = \pi/200$	6.8481e-02	6.6643e-02	6.5784e-02	6.5430e-02	6.5291e-02	6.5237e-02
$u(0, t), t = 2\pi$	-2.9471e-02	-2.983e-02	-2.9946e-02	-2.9986e-02	-3.0000e-02	-3.0005e-02
$u(0, t), t = 4\pi$	-1.0386e-02	-1.0511e-02	-1.0551e-02	-1.0565e-02	-1.057e-02	-1.0572e-02

表 4.4 $\alpha = 0.8$ 时确定性正问题解 $u(0, t)$ 在不同步长下的结果

区间个数	50	100	200	400	800	600
$u(0, t), t = \frac{\pi}{200}$	6.2355e-02	5.8893e-02	5.697e-02	5.6013e-02	5.5567e-02	5.5365e-02
$u(0, t), t = 2\pi$	-4.1580e-02	-4.2484e-02	-4.2840e-02	-4.2985e-02	-4.3045e-02	-4.3071e-02
$u(0, t), t = 4\pi$	-1.4698e-02	-1.5013e-02	-1.5137e-02	-1.5188e-02	-1.5209e-02	-1.5218e-02

例 4.1: 令 $N_t = 65, N_x = 100$, 重复試驗次數為 1000 次, 且數據帶有 5% 的測量誤差. 源函數為 $F(t) = \sin(t) \exp(-t/6), T = 4\pi$. 且考慮分數階參數 $\alpha = 0.4$ 和 $\alpha = 0.8$ 的兩種情況.

其重构結果如下圖所示:

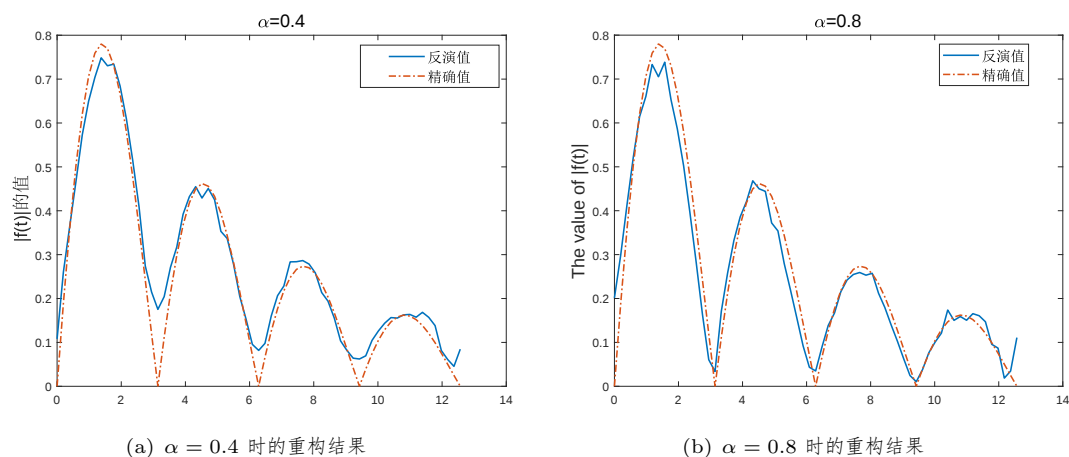


圖 4.2 算例 3.1 的源函數重构結果, 紅色虛線為真實值, 藍色實線為重构後的值

例 4.2: 令源函數為 $F(t) = \sin(2t) \cos(3t), T = \pi$. 其餘設定與算例 4.1 相同. 其重构結果如下圖所示:

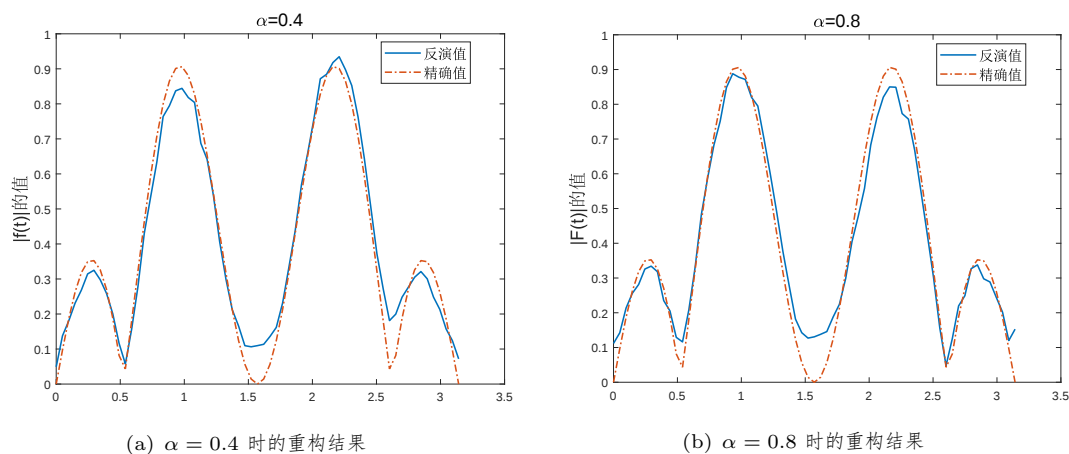


圖 4.3 算例 4.2 的源函數重构結果, 紅色虛線為真實值, 藍色實線為重构後的值

例 4.3: 令源函數 $F(t)$ 为:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T/5), \\ 2, & t \in [T/5, 2T/5), \\ 0.5, & t \in [2T/5, 3T/5), \\ 1.5, & t \in [3T/5, 4T/5), \\ 0, & t \in [4T/5, T], \end{cases}$$

且 $T = \pi$, 且数据分别带有 0%, 3% 和 5% 的误差, 用以测试算法的稳定性, 其余设置与算例算例 4.1 相同. 其反演结果如下图所示:

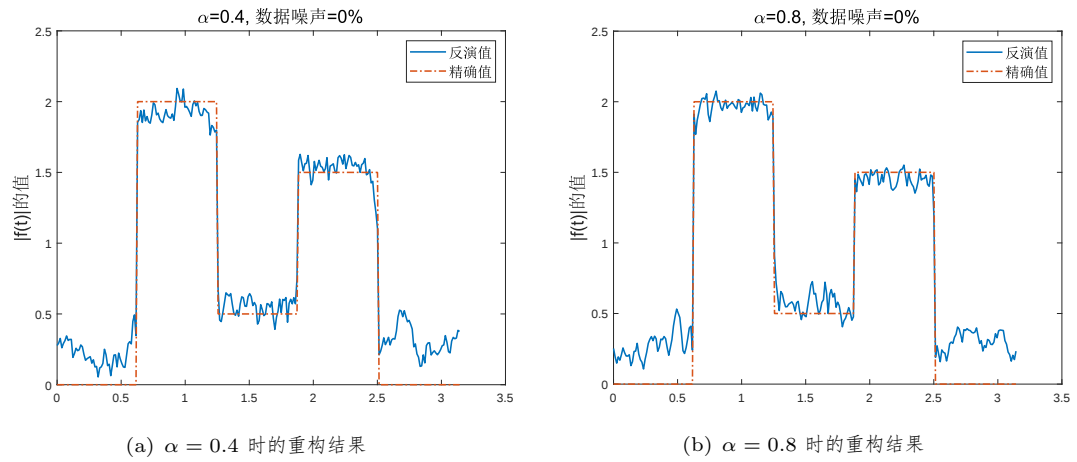


图 4.4 不存在数据误差时算例 4.3 的源函数重构结果, 红色虚线为真实值, 蓝色实线为重构后的值

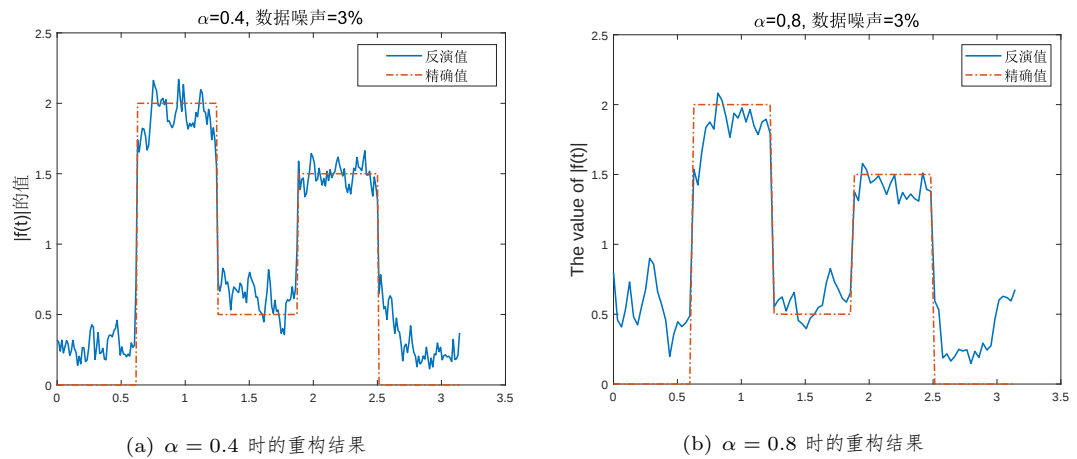


图 4.5 数据误差有 3% 时算例 4.3 的源函数重构结果, 红色虚线为真实值, 蓝色实线为重构后的值

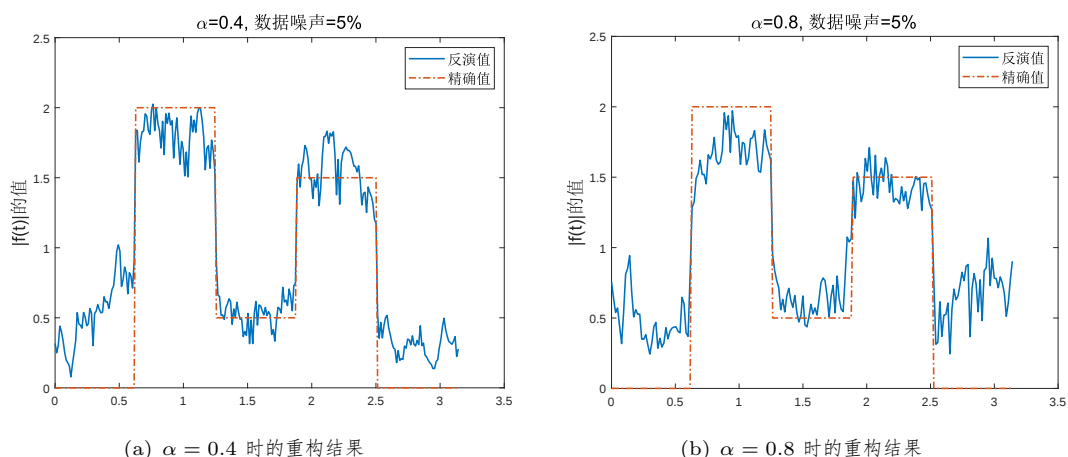


图 4.6 数据误差有 5% 时算例 4.3 的源函数重构结果, 红色虚线为真实值, 蓝色实线为重构后的值

从上述三个算例可以看出, 我们提出的算法对于反演源函数的模是较为有效和稳健的, 且反演光滑函数的效果要优于带有间断点的函数效果.

4.6 本章小结

本章节我们研究讨论了时间分数阶扩散方程的随机反源问题. 我们将时间域上的原问题等价地转换为频域上的两点边值问题, 并且通过证明后者正问题的适定性来得到原问题正问题的稳定性. 而对于随机源的反演, 我们通过问题的转换证明出原问题的随机源傅里叶变换的模可以被边值数据傅里叶变换后的方差唯一得到. 随即我们将该问题转化为了相位还原的问题, 并且通过相位提升算法, 通过随机遮罩最终重构出原问题的随机源. 最后, 我们给出的数值算例展示了该算法的有效性和稳定性.

5 无边界分数阶扩散方程随机反源问题

5.1 引言

在第 4 章中, 我们讨论并研究了带有空间随机源的有界区域内一维分数阶扩散方程, 在本章中, 我们将研究带有空间随机项的无边界分数阶扩散方程在一, 二和三维中的正问题与反问题. 空间无界域上的时间整数阶问题已经被许多学者研究过. 正如 [84–86] 中所指出的, 无界域上的扩散问题来自于固体中的热传递, 流体动力学, 金融数学中的期权定价理论或是其他应用数学领域. 上世纪末, Mainardi 利用拉普拉斯变换研究讨论了一维空间下无边界的分数阶扩散-波方程柯西问题和信号问题的基本解. 并以 M-Wright 函数的形式表示该问题的基本解构成. Metzler 和 Klafter [50] 利用图像和 Mittag-Leffler 函数, 研究了分数阶扩散方程在一维空间上半轴的解. Agrawal [89] 利用拉普拉斯变换和格林函数的方法针对四阶分数阶扩散方程给出了相应的解的表达形式. 而 Povstenko [90] 则利用 Mittag-Leffler 函数和空间域上的傅里叶变换研究了时间分数阶扩散-波方程在二维半平面上的解析解. 并且在 [91] 中对于相同问题下的径向问题利用积分变换方法给出了解答.

而对于本章来说, 由于随机项与空间相关, 我们无法通过传统的 Mittag-Leffler 函数来得到函数的弱解形式, 从而需要像第 4 章那样将问题转换到空间域-频域上来进行理论分析. 我们将通过转换后的等价方程, 证明在二维和三维的情况下随机扩散方程正问题的适定性和正则性, 证明扩散方程反问题中, 其源项的傅里叶变换模同样能够通过频域上等价转换方程的解的方差唯一确定. 从而我们可以利用第 4 章相同的相位还原的方法唯一求解随机扩散源系数的模.

类似于第 2 章中我们对高维随机源的假定, 本章中的源函数的随机部分将同样由有色噪声构成, 当其相关函数为 δ 函数时, 有色噪声即退化为多维的白噪声. 同样, 该方程的正问题为在给定源项方程的情况下确定随机扩散场, 而反问题即为如何通过利用边界上的扩散场信息来重构随机源的统计特征, 例如均值和方差.

5.2 问题描述

考虑以下时间分数阶扩散随机方程:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, d = 1, 2, 3, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \\ u(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 $d = 1, 2, 3$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\chi_D(\mathbf{x})$ 是空间域上的指示函数 (indicator function), 扩散源 $f(\mathbf{x}, t)$ 是一个随机函数, 满足

$$f(\mathbf{x}, t) = F(t)\chi_D(\mathbf{x})\dot{W}_{\mathbf{x}},$$

这里 F 是一个确定的实函数, 且满足 $F(0) = 0$, $\chi_D(\mathbf{x})$ 是空间域上关于有界区域 D 的指示函数, $D \subset \mathbb{R}^d$. Caputo 分数阶导数 $\partial_t^\alpha u$ 由以下表达式定义:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \partial_s u(x, s)(t-s)^{-\alpha} ds$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}ds$ 是伽马函数. $\dot{W}_{\mathbf{x}}$ 是定义在空间域上的有色噪声, 具体介绍参见第 2.2.3 节.

对于这个方程, 其正问题为在给定随机源函数 f 的情况下, 计算方程(5.1)的随机扩散场 u . 而反问题则是通过给定的某点一段时间下的扩散场 $u(\mathbf{x}_0, t)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$, 重构扩散源系数 $F(t)$.

5.3 正问题的适定性分析

本节中, 我们将通过将原问题等价转化为频域上的问题, 通过分析等价问题的适定性和其弱解的正则性得到我们想要的结果.

5.3.1 频域下正问题分析

利用第 4.2 节中的引理 4.1, 我们知道对于一个分数阶导数 $\partial_t^\alpha v$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 下适定的单边函数 $v(t)$, 其分数阶导数的傅里叶变换满足:

$$\mathcal{F}[\partial_t^\alpha v](\omega) = (i\omega)^\alpha \hat{v}(\omega) \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

其中

$$\hat{v}(\omega) = \mathcal{F}[v](\omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} v(t) dt$$

表示 v 的傅里叶变换. 注意到当 α 不为整数时, $(i\omega)^\alpha$ 是一个多值函数, 我们在这里定义

$$(i\omega)^\alpha := \begin{cases} |\omega|^\alpha \exp\left(\frac{i\pi\alpha}{2} \text{sgn}(\omega)\right), & \omega \neq 0, \\ 0, & \omega = 0, \end{cases}$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数.

因为扩散系数 F 满足 $F(0) = 0$, 所以我们可以将其零延拓到负轴 $(-\infty, 0)$ 上, 定义延拓后的函数为 $\tilde{F}$, 且有 $\tilde{F}$ 的傅里叶变换为 $\hat{F}$. 因此我们对方程(5.1)两边傅里

叶变换, 得到以下全空间的随机偏微分方程:

$$\begin{cases} \Delta U(\mathbf{x}, \omega) - (i\omega)^\alpha U(\mathbf{x}, \omega) = -\hat{F}(\omega) \chi_D(\mathbf{x}) \dot{W}_{\mathbf{x}}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \omega \in \mathbb{R}, \\ |U(\mathbf{x}, \omega)| \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.2)$$

当 $\omega \neq 0$ 时, 我们知道式(5.2)是一个修改后的亥姆霍兹方程 (modified Helmholtz equation), 令 $(i\omega)^{\alpha/2} = k$, 则方程在全空间上的格林函数, 即其基本解为 [92]:

$$G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} G_1^\omega(x, y) = -\frac{1}{2k} \exp(-k|x-y|), & d=1, \\ G_2^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} K_0(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|), & d=2, \\ G_3^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(-k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, & d=3. \end{cases} \quad (5.3)$$

这里 $x, y \in \mathbb{R}^d, d=2, 3$, $K_0(\cdot)$ 是零阶的第二类修正贝塞尔函数 (modified Bessel function of the second kind), k 满足:

$$k = (i\omega)^{\alpha/2} = |\omega|^{\alpha/2} \exp\left(\frac{i\pi\alpha}{4} \text{sgn}(\omega)\right), \quad \Re[k] = |\omega|^{\alpha/2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) > 0.$$

$\Re[\cdot]$ 与下文中的 $\Im[\cdot]$ 分别表示一个复数的实部和虚部.

当 $\omega = 0$ 时有 $k = 0$, 则在二维和三维环境下, 方程退化为一个全空间上的泊松方程, 我们知道全空间上的拉普拉斯的基本解为:

$$G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} G_1^0(x, y) = \frac{1}{2}|x-y|, & d=1, \\ G_2^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, & d=2, \\ G_3^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, & d=3. \end{cases} \quad (5.4)$$

在对频域上方程的格林函数进行估计之前, 我们先对零阶的第二类修正贝塞尔函数 $K_0(x)$ 进行阐述.

命题 5.1: 令 $z \in \mathbb{C}$, 若 $\Re[z] > 0$, 则 ν 阶的修正第二类贝塞尔函数有积分表示 [92]:

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty \exp(-z \cosh(t)) \cosh(\nu t) dt. \quad (5.5)$$

其中 $\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2$ 是双曲余弦.

从而我们给出 $K_0(k|\mathbf{x}, \mathbf{y}|)$ 的估计.

引理 5.1: 令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界区域, 且 $y \in \Omega$. 则对于给定的 ω 和任意的有界区域 $K \subset \mathbb{R}^d$, 修正的零阶第二类贝塞尔函数 K_0 有以下估计:

$$\|K_0(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 \lesssim |\omega|^{-\alpha/2}. \quad (5.6)$$

其中 $k = (i\omega)^{\alpha/2} = |\omega|^{\alpha/2} \exp(\operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi\alpha}{4} i)$, $\omega \neq 0$.

在本文中, $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$, 其中 C 是一个与变量无关的常数.

证明： 首先我们给出对 $|K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2$ 的估计, 即有:

$$\begin{aligned} |K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 &= \left| \int_0^\infty \exp\left(-k|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) dt \right|^2 \\ &= \left| \int_0^\infty \exp\left(-\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cosh t\right) \cos\left(\Im[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cosh t\right) dt \right|^2 \\ &\quad + \left| \int_0^\infty \exp\left(-\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cosh t\right) \sin\left(\Im[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cosh t\right) dt \right|^2 \\ &< 2 \left| \int_0^\infty \exp\left(-\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cosh t\right) dt \right|^2 \end{aligned}$$

我们知道对于 $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$, 因此存在 $N \in \mathbb{R}, N > 0$, 当 $t \geq N$ 时有 $t^2 < \cosh t$, 所以有:

$$\begin{aligned} |K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 &\lesssim \left| \int_0^N \exp\left(-\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cosh t\right) dt + \int_0^\infty \exp(-\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}| t^2) dt \right|^2 \\ &< \left| N \exp(-\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}} \right|^2 \\ &\lesssim \exp\left(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\right) + \frac{\pi}{4\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \end{aligned}$$

从而对于 $\|K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_{L^2(K \times \Omega)}^2$ 来说, 有

$$\begin{aligned} \|K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 &= \int_\Omega \int_K |K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &\lesssim \int_\Omega \int_K \exp\left(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\right) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_\Omega \int_K \frac{\pi}{4\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

令 $B_\rho(\mathbf{y})$ 为以 $\mathbf{y}$ 为中心, ρ 为半径的圆或球, 且满足 $\rho = \sup_{\mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in \Omega} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, 则

对 $\forall y \in \Omega$ 有 $\overline{K} \subset B_\rho(y), \overline{\Omega} \subset B_\rho(y)$, 从而对于 I_1 , 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &< \int_{\Omega} \int_{B_\rho(y)} \exp(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} \int_0^\rho r \exp(-2\Re[k]r) dr d\mathbf{y} \\ &= \mu(\Omega) \frac{1}{2\Re[k]} \left(\frac{1 - \exp(-2\Re[k]\rho)(2\Re[k]\rho + 1)}{2\Re[k]} \right) \\ &=: \mu(\Omega) \frac{1}{2\Re[k]} h(2\Re[k]), \end{aligned}$$

其中 $\mu(\Omega)$ 是有界区域 Ω 的测度, h 满足

$$h(x) = \frac{1 - \exp(-\rho x)(\rho x + 1)}{x}$$

由于 $\frac{d}{dx}(e^{-\rho x}(\rho x + 1)) = -e^{-\rho x}\rho^2 x \leq 0, \forall x \geq 0$, 因此 $e^{-\rho x}(\rho x + 1) \leq 1$, 即 $h(x)$ 在 $x \geq 0$ 时非负. 接下来我们说明对于任意的 $x > 0$, 函数 $h(x)$ 都是一致有界的.

一方面, 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0,$$

因而存在一个常数 C_0 , 使得当 $k > C_0$ 时, 有 $h(x) < 1$, 从而我们可以得到 h 在 (C_0, ∞) 上是一致有界的. 而另一方面, 注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\rho^2 x}{e^{\rho x}} = 0.$$

从而通过光滑性得出 h 在 $(0, C_0]$ 上也是一致有界的. 因此我们有对于任意的 $x > 0$, 函数 $h(x)$ 都是一致有界的. 即有:

$$I_1 \lesssim \frac{1}{\Re[k]} \lesssim |\omega|^{-\alpha/2}. \quad (5.7)$$

而对于 I_2 , 我们有

$$\begin{aligned} I_2 &< \int_{\Omega} \int_{B_\rho(y)} \frac{\pi}{4\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} \int_0^\rho r \frac{\pi}{4\Re[k]r} dr d\mathbf{y} \\ &= \frac{\pi\rho}{4\Re[k]} \mu(\Omega) \lesssim |\omega|^{-\alpha/2}. \end{aligned}$$

结合我们对 I_1 和 I_2 的估计, 我们有

$$\|K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 \lesssim |\omega|^{-\alpha/2}.$$

从而引理得证.

接下来我们对格林函数做出以下正则性估计, 这将对接下来的方程估计中起到关键性的作用.

引理 5.2: 由式(5.4)和式(5.3), 令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界区域, 则对于给定的 $\omega \in \mathbb{R}$ 和任意有界区域 $K \subset \mathbb{R}^d$, 格林函数 G_d^ω 满足以下估计:

$$\begin{cases} \|G_d^0\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 < \text{Const} < \infty, & d = 1, 2, 3 \\ \|G_d^\omega\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 \lesssim |\omega|^{-\alpha}, & d = 1 \\ \|G_d^\omega\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 \lesssim |\omega|^{-\alpha/2}, & d = 2, 3. \end{cases}$$

其中 $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$, 其中 $C > 0$ 是一个与 ω 不相关的常数.

证明: 令 $B_\rho(\mathbf{y})$ 为以 $\mathbf{y}$ 为中心, ρ 为半径的圆或球, 且满足 $\rho = \sup_{x \in K, y \in \Omega} |x - y|$. 若 $d = 1$, 当 $\omega = 0$ 时, 直接计算有

$$\begin{aligned} \|G_1^0\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \int_K \left| \frac{1}{2} |x - y| \right|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_K (x - y)^2 dx dy \\ &< \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_K \rho^2 dx dy \\ &= \frac{\rho^2}{4} |\Omega| |K| < \infty. \end{aligned}$$

这里 $|\Omega|, |K|$ 分别指的是 Ω 和 K 的区间长度.

当 $\omega \neq 0$ 时, 通过直接计算积分, 我们有

$$\begin{aligned} \|G_\omega^0\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \int_K \left| \frac{1}{2k} \exp(-k|x - y|) \right|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{4|k|^2} \int_{\Omega} \int_K \exp(-2\Re[k]|x - y|) dx dy \\ &< \frac{1}{4|k|^2} \int_{\Omega} \int_K 1 dx dy \\ &= \frac{1}{4|\omega|^\alpha} |\Omega| |K| \\ &\lesssim |\omega|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

若 $d = 2, \omega = 0$ 时, 则通过计算有

$$\begin{aligned}
 \|G_2^0\|_{L^2(K \times \Omega)} &= \int_{\Omega} \int_K \left(-\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right)^2 d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \int_{B_{\rho}(\mathbf{y})} |\ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \int_0^{\rho} r |\ln r|^2 dr d\mathbf{y} \\
 &= \frac{\mu(\Omega)\rho^2}{16\pi^2} [2(\ln \rho)^2 - 2\ln \rho + 1] < \infty.
 \end{aligned}$$

$\omega \neq 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
 \|G_2^{\omega}\|_{L^2(K \times \Omega)} &= \int_{\Omega} \left[\int_K \left| \frac{1}{2\pi} K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right|^2 d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \int_K |K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \|K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\|_{L^2(K \times \Omega)}^2 \\
 &\lesssim |\omega|^{-\alpha/2}.
 \end{aligned}$$

当 $d = 3$ 时, 对 $\omega = 0$

$$\begin{aligned}
 \|G_3^0\|_{L^2(K \times \Omega)} &= \int_{\Omega} \int_K \left(-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^2 d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
 &\leq \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \int_{B_{\rho}(\mathbf{y})} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \int_0^{\rho} dr d\mathbf{y} \\
 &= \frac{\rho\mu(\Omega)}{16\pi^2} < \infty.
 \end{aligned}$$

$\omega \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\|G_3^\omega\|_{L^2(K \times \Omega)} &= \int_{\Omega} \left[\int_K \left| \frac{\exp(-(i\omega)^{\alpha/2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right|^2 d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \left[\int_K \frac{\exp(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} \\
&< \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \left[\int_{B_\rho(\mathbf{y})} \frac{\exp(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} \\
&< \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \left(\int_0^\rho \exp(-\sqrt{2}|\omega|^{\alpha/2}r) dr \right) d\mathbf{y} \\
&= \frac{\mu(\Omega)}{16\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2}|\omega|^{\alpha/2}} \\
&\lesssim |\omega|^{-\alpha/2}
\end{aligned}$$

从而得证引理结论.

5.3.2 频域下问题的适定性

基于推导出的格林函数 $G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的性质, 我们接下来证明随机微分方程(5.2)存在唯一弱解, 我们将给出其弱解的表达形式, 并对其正则性进行估计.

在此之前, 我们回顾有关有色噪声的一些性质和对此作出的假设, 首先, 对于频域下的随机问题:

$$\begin{cases} \Delta U(\mathbf{x}, \omega) - (i\omega)^\alpha U(\mathbf{x}, \omega) = -\hat{F}(\omega)\chi_D(\mathbf{x})\dot{W}_{\mathbf{x}}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \omega \in \mathbb{R}, \\ |U(\mathbf{x}, \omega)| \rightarrow 0, & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

其中正如第 3 章 3.3.2 节中式(3.23)中所定义的那样, 上述问题中的 $\dot{W}_X$ 满足协方差方程

$$c(X, Y) = \mathbf{E}(\dot{W}_X \dot{W}_Y) = c(X - Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^d.$$

在这里我们同样假设对于某个 $q_0 \geq 1$, 有 $c \in L_{\text{loc}}^{q_0}(\mathbb{R}^d)$. 因此, 利用格林函数, 我们可以给出问题 5.2 的弱解形式:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{x}, \omega) &= - \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\omega)\chi_D(\mathbf{y})G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})dW_{\mathbf{y}} \\
&= -\hat{F}(\omega) \int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})dW_{\mathbf{y}}.
\end{aligned}$$

我们首先给出关于这一随机积分方程的适定性估计. 即证明

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\left|\int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})dW_{\mathbf{y}}\right|^2\right) \\ &= \int_D \int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})c(\mathbf{y} - \mathbf{z})\overline{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z})d\mathbf{y}d\mathbf{z} < \infty, \end{aligned}$$

这里我们利用了有色噪声的性质, 即定理 2.13.

利用第 3 章 3.3.2 节引理 3.3 提到的杨不等式(3.26), 我们有

$$\begin{aligned} & \int_D \int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})c(\mathbf{y} - \mathbf{z})\overline{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z})d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ & \leq \|G^\omega(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^{p_0}(D)}^2 \|c\|_{L^{q_0}(B_{2R})}, \end{aligned}$$

其中 $p_0 = \frac{2q_0}{2q_0-1}$. 因为我们对相关函数 $c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的假设要求这里 $q_0 \geq 1$, 所以这里我们有 $p_0 \in [1, 2]$. 由 $p_0 \leq 2$, 我们有关系式:

$$\|G^\omega(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^{p_0}(D)}^2 \leq \frac{\mu(D)^{2/p_0}}{\mu(D)} \|G^\omega(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^2(D)}^2.$$

因此在这里我们有估计

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\left|\int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})dW_{\mathbf{y}}\right|^2\right) \\ & \leq \|G^\omega(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 \|c\|_{L^{q_0}(B_{2R})}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中 $q_0 \geq 1$.

注 5.1: 我们知道当 $c(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ 时, 尤其在一维的情况下, 随机源中的有色噪声退化为白噪声, 且有

$$\mathbf{E}\left(\left|\int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})dW_{\mathbf{y}}\right|^2\right) = \int_D |G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}.$$

这时我们有 $q_0 = 1, p_0 = 2q_0/(2q_0 - 1) = 2$.

现在我们给出频域上正问题的适定性估计.

定理 5.1: 若 $F \in H^1(\mathbb{R}_+)$, 那么当相关函数 $c(\mathbf{x})$ 满足假设 $c \in L^{q_0}(D), q_0 \geq 1$ 时, 随机微分方程 (5.2) 存在唯一弱解:

$$U(\mathbf{x}, \omega) = -\hat{F}(\omega) \int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})dW_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \omega \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

同时, 解 U 满足以下估计:

$$\mathbb{E}\|i\omega U\|_{L^2(\mathbb{R}; L_{loc}^2(\mathbb{R}^d))}^2 \lesssim \|c\|_{L^{q_0}(D)} \|F\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2, \tag{5.10}$$

证明：弱解(5.9)的存在性和唯一性类似于第3章3.3节中的证明, 在这里我们不再叙述. 我们这里给出对于估计(5.10)的证明.

根据有色噪声的性质和式(5.8), 对任意的有界区域 $K \subset (\mathbb{R}^d)$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\mathbf{i}\omega U\|_{L^2(K; L^2(\mathbb{R}^d))}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_K |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 \mathbf{E} \left| \int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dW_{\mathbf{y}} \right|^2 d\mathbf{x} d\omega \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\omega|^2 |\hat{F}(\omega)|^2 \int_K \|G^\omega(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 \|c\|_{L^{q_0}(D)} d\mathbf{x} d\omega \\ &= \|c\|_{L^{q_0}(D)} \int_{\mathbb{R}} \int_K \int_D |G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} d\mathbf{x} d\omega \\ &= \|c\|_{L^{q_0}(D)} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 \|G^\omega\|_{L^2(K \times D)}^2 d\omega. \end{aligned}$$

由引理 5.2 和帕斯瓦尔恒等式, 上式满足

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\mathbf{i}\omega U\|_{L^2(\mathbb{R}; L_{loc}^2(\mathbb{R}^d))}^2 &\leq \|c\|_{L^{q_0}(D)} \left(\int_{\{\omega: |\omega| \leq 1\}} |\hat{F}(\omega)|^2 d\omega + \int_{\{\omega: |\omega| > 1\}} |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 d\omega \right) \\ &\lesssim \|c\|_{L^{q_0}(D)} \left(\int_{\{\omega: |\omega| \leq 1\}} |\hat{F}(\omega)|^2 d\omega + \int_{\{\omega: |\omega| > 1\}} |\mathbf{i}\omega \hat{F}(\omega)|^2 d\omega \right) \\ &\leq \|c\|_{L^{q_0}(D)} \left(\|\hat{F}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\mathbf{i}\omega \hat{F}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \\ &= \|c\|_{L^{q_0}(D)} \|F\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

从而定理得证.

5.3.3 时域下的正问题分析

基于上述分析, 我们对给出频域问题求解与时域正问题的等价性, 并且给出问题(5.1)的适定性证明.

定理 5.2: 若 $F \in H^1(\mathbb{R}_+)$, 那么无边界下的分数阶扩散随机源方程(5.1)存在唯一解 u 满足以下估计:

$$\mathbf{E} \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}; L_{loc}^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq C \|F\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

其中 $C > 0$ 是一个常数.

证明： 令

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(\mathbf{x}, \cdot)](t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R},$$

其中 $\mathcal{F}^{-1}$ 是傅里叶逆变换, $U = -\hat{F}(\omega) \int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dW_{\mathbf{y}}$ 是方程(5.2)的弱解. 定义

$$u(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}(\mathbf{x}, t) \Big|_{t \geq 0}. \quad (5.11)$$

为了说明问题(5.1)解的存在性, 我们将说明(5.11)中定义的 u 就是问题(5.1)的解.

首先我们说明 $u(\mathbf{x}, t)$ 满足问题(5.1)的初值条件和无穷远处的衰减条件.

由于 $U(\mathbf{x}, \omega)$ 满足方程(5.2), 因此满足

$$|U(\mathbf{x}, \omega)| \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow 0,$$

显然 $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$ 满足 $\tilde{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, |\mathbf{x}| \rightarrow 0$, 从而有 $u(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, |\mathbf{x}| \rightarrow 0$. 而又注意到

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(\mathbf{x}, \cdot)](t) \\ &= \tilde{F}(t) * \mathcal{F}^{-1}\left[\int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dW_{\mathbf{y}}\right] \\ &= -\int_{-\infty}^t \tilde{F}(s) \mathcal{F}^{-1}\left[\int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dW_{\mathbf{y}}\right](t-s) ds, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{F}$ 是 $F(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的零延拓, 且 $\tilde{F}(0) = F(0) = 0$. 因此可知 $\tilde{u}$ 是一个单边函数, 即当 $t \leq 0$ 时, $\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = 0$, 从而有

$$u(\mathbf{x}, 0) = \tilde{u}(\mathbf{x}, 0) = 0. \quad (5.12)$$

而由帕西瓦尔恒等式和定理 5.1 我们知道, $\partial_t \tilde{u}$ 满足

$$\mathbf{E} \|\partial_t \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}; L_{loc}^2(\mathbb{R}^d))}^2 = \mathbf{E} \|i\omega U\|_{L^2(\mathbb{R}; L_{loc}^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq C \|F\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}^2, \quad (5.13)$$

这也证明了 $\tilde{u}$ 关于 t 的 Caputo 分数阶导数是适定的.

再关于 ω 对式(5.2)两边做逆傅里叶变换, 利用 $\tilde{u}$ 满足 $u = \tilde{u}|_{\mathbb{R}_+}$ 的关系式, 以及单边函数 $\tilde{u}$ 满足引理 5.2 的要求, 我们有:

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}, t) - \partial_t^\alpha u(\mathbf{x}, t) = -F(t) \dot{W}_{\mathbf{x}}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, & \mathbf{x} \rightarrow \infty, t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (5.14)$$

我们将式(5.14)和初值条件(5.12)相结合, 则可以得出式(5.11)中定义的 u 即为满足估计(5.13)的问题(5.1)的解.

而由于傅里叶变换的可逆性, 显然函数 $\tilde{u}$, 以及相应的 $u(\mathbf{x}, t)$ 满足问题中的(5.1)微分方程, 其适定性也可以直接利用我们分析(5.2)时的定理(5.1)得到.

5.4 反问题的理论分析

在本章中, 我们将研究方程(5.1)的反问题, 即如何通过空间中任意一点 $\mathbf{x}_0$ 处一段时间 $[0, T]$ 的扩散场 $u(\mathbf{x}_0, t), t \in [0, T]$ 来反演随机源中的扩散系数 $F(t)$.

5.4.1 频域下随机源模重构

首先我们考虑如何重构 F 傅里叶变换之后的模, 并且分析反演这一问题的唯一性和存在的不确定性. 在对反问题的分析和求解中, 我们假定随机源的噪声在不同维度下是不相关的, 即为多维的白噪声.

5.4.1.1 唯一性分析

在白噪声的驱动下, 我们的弱解有如下形式:

$$U(\mathbf{x}, \omega) = -\hat{F}(\omega) \int_D G^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\widetilde{W}_{\mathbf{y}}.$$

从而利用等距公式, 我们知道解 $U(\mathbf{x}, \omega)$ 在任意一点 $\mathbf{x}_0$ 处的均值和方差满足:

$$\mathbf{E}[U(\mathbf{x}_0, \omega)] = 0,$$

以及

$$\mathbf{V}[U(\mathbf{x}_0, \omega)] = \mathbf{E}[|U(\mathbf{x}_0, \omega)|^2] = |\hat{F}(\omega)|^2 \int_D |G^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}, \quad (5.15)$$

从而我们有以下引理.

引理 5.3: 对于任意固定的 $\omega \in \mathbb{R}$, 有以下估计:

$$\int_D |G^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} > 0.$$

证明: 当 $d = 1$ 时, 对 $\omega = 0$, 则对于任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\int_D |G_1^0(x_0, y)|^2 dy = \int_D \frac{1}{4} (x_0 - y)^2 dy$$

显然上式积分非负, 由于 $(x_0 - y)^2 \geq 0$, 且对于 $y \in D$ 来说 $(x_0 - y)^2$ 不恒为零, 因此有 $\int_D |G_1^0(x_0, y)|^2 dy > 0$.

当 $\omega \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \int_D |G_1^\omega(x_0, y)|^2 dy &= \frac{1}{2|\omega^\alpha|} \int_D \exp(-2\Re[k]|x - y|) dy \\ &> \frac{1}{2|\omega^\alpha|} \int_D \exp(-2\Re[k]\rho) dy \\ &= \frac{|D| \exp(-\Re[k]\rho)}{2|\omega|^\alpha} > 0. \end{aligned}$$

当 $d = 2$ 时, 若 $\omega = 0$, 则对于任意的 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, 我们有

$$\int_D |G_2^0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} = \frac{1}{4\pi^2} \int_D (\ln |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|)^2 d\mathbf{y}.$$

只有当 $y \in \partial B_{x_0}(1)$ 时有 $(\ln|x_0 - y|)^2 = 0$, 而对于有界区域 D 来说显然有 $D \neq B_{x_0}(1)$, 从而有

$$\int_D |G_2^0(x_0, y)|^2 dy > 0.$$

若 $\omega \neq 0$, 令 $\rho = \max_{y \in D} |x_0 - y|$, 则有

$$\begin{aligned} \int_D |G_2^\omega(x_0, y)|^2 dy &= \frac{1}{4\pi^2} \int_D |K_0(-k|x_0 - y|)|^2 dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_D \left| \int_0^\infty \exp\left(-k|x_0 - y| \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) dt \right|^2 dy \\ &> \frac{\mu(D)}{4\pi^2} \left| \int_0^\infty \exp(-k\rho \cosh t) dt \right|^2 \\ &= \frac{\mu(D)}{4\pi^2} \left(\left| \int_0^\infty \exp(-\Re[k]\rho \cosh t) \cos(\Im[k]\rho \cosh t) dt \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^\infty \exp(-\Re[k]\rho \cosh t) \sin(\Im[k]\rho \cosh t) dt \right|^2 \right). \end{aligned}$$

由于对上式来说, 两个积分不可能同时为零, 所以我们有

$$\int_D |G_2^\omega(x_0, y)|^2 dy > 0.$$

当 $d = 3$ 时, 若 $\omega = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \int_D |G_3^0(x_0, y)|^2 dy &= \frac{1}{16\pi^2} \int_D \left| \frac{1}{|x_0 - y|} \right|^2 dy \\ &> \frac{\mu(D)}{16\rho\pi^2} > 0. \end{aligned}$$

$\omega \neq 0$ 时, 则有:

$$\begin{aligned} \int_D |G_3^\omega(x_0, y)|^2 dy &= \frac{1}{16\pi^2} \int_D \left| \frac{-k|x_0 - y|}{|x_0 - y|} \right|^2 dy \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_D \frac{\exp(-2\Re[k]|x_0 - y|)}{|x_0 - y|^2} dy \\ &> \frac{1}{16\pi^2} \int_D \frac{\exp(-2\Re[k]\rho)}{\rho^2} dy \\ &> \frac{\mu(D)}{16\pi^2\rho^2} \exp(|\omega|^{\alpha/2}\rho) > 0. \end{aligned}$$

从而引理得证.

定理 5.3: 若 $F \in H^1(\mathbb{R}_+)$, 则傅里叶模 $|\hat{F}(\omega)|$ 可以被空间上任意一点 x_0 上的扩散场数据傅里叶变换后的方差 $\mathbf{V}[U(x_0, \omega)]$ 所唯一确定.

证明： 利用式(5.15)和引理 5.3, 我们可以直接得到, 对任意给定的 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$|\hat{F}(\omega)| = \left(\frac{\mathbf{V}[U(\mathbf{x}_0, \omega)]}{\int_D |G^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

从而保证了重构的唯一性.

5.4.1.2 稳定性分析

由定理 5.3, 我们知道虽然反问题存在唯一解, 但是解却缺乏稳定性, 因为当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 重构关系式(5.16)的分母 $\int_D |G^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}$ 将会趋于零. 我们将在下面的定理中给出具体的估计.

定理 5.4: 对于任意固定的 $\omega \neq 0$ 和给定的 $\mathbf{x}_0$, 格林函数 $G^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ 满足以下估计:

$$\begin{cases} \int_D |G_d^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \lesssim |\omega|^{-\alpha}, & d = 1 \\ \int_D |G_d^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \lesssim |\omega|^{-\alpha/2}, & d = 2, 3. \end{cases}$$

证明： 由(5.3), 当 $d = 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_D |G_1^\omega(x_0, y)|^2 dy &= \int_D \left| \frac{1}{k} \exp(-k|x_0 - y|) \right|^2 dy \\ &= \frac{1}{2|\omega|^\alpha} \int_D \exp(-2\Re[k]|x_0 - y|) dy \\ &< \frac{|D|}{2|\omega|^\alpha} \\ &\lesssim |\omega|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

当 $d = 2$ 时, 有:

$$\int_D |G_2^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} = \frac{1}{4\pi^2} \int_D |K_0(-k|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|)|^2 d\mathbf{y}.$$

引理 5.1中, 我们有估计

$$|K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)|^2 \lesssim \exp(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \frac{\pi}{4\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

令 $B_\rho(\mathbf{x}_0)$ 为以 $\mathbf{x}_0$ 为中心, ρ 为半径的圆或球, 且满足 $\rho = \sup_{\mathbf{y} \in D} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|$, 则对

$\forall y \in D$ 有 $\overline{D} \subset B_\rho(\mathbf{x}_0)$, 从而我们有:

$$\begin{aligned} \int_D |G_2^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} &\lesssim \int_D \left(\exp(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \frac{\pi}{4\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d\mathbf{y} \\ &< \int_{B_\rho(\mathbf{x}_0)} \exp(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mathbf{y} + \int_{B_\rho(\mathbf{x}_0)} \frac{\pi}{4\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{2\Re[k]} (h(2\Re[k]) + \frac{\pi\rho}{2}) \\ &\lesssim |\omega|^{-\alpha/2}. \end{aligned}$$

其中 $h(2\Re[k])$ 的定义和估计与引理 5.1 中相同, 在此不多做赘述, 即有 $h(2\Re[k])$ 在 $\Re[k] = |\omega|^{\alpha/2} \cos(\frac{\pi\alpha}{4})$ 大于零时一致有界.

当 $d = 3$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_D |G_3^\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} &= \int_D \left| \frac{\exp(-k|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|} \right|^2 d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_D \frac{\exp(-2\Re[k]|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} \\ &< \frac{1}{16\pi^2} \int_{B_\rho(\mathbf{x}_0)} \frac{\exp(-2\Re[k]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} \\ &< \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\rho \exp(-\Re[k]r) dr \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1 - \exp(-\Re[k]\rho)}{\Re[k]} \\ &\lesssim |\omega|^{-\alpha/2} \end{aligned}$$

从而定理得证.

注 5.2: 对于通过扩散系数傅里叶变换的模 $|\hat{F}(\omega)|$ 反演得到 $|F(t)|$ 的相位还原方法以及相关理论, 我们已经在第 4 的 4.4.2 节中阐述过, 在这里不做过多说明.

5.5 本章小结

本章节我们在上一章的基础上, 研究讨论了多维情形下无边界的时间分数阶扩散方程的随机反源问题. 基于多维随机源是由有色噪声驱动的假设下, 我们首先将时间域上的原问题等价地转换为频域上的两点边值问题, 得到了后者正问题解的局部存在性和有界估计, 并且通过频域和时域问题的等价性得到了原问题解的适定性. 而对于随机源的反演, 我们在白噪声驱动随机源的假设下给出了求解随机源系数的傅里叶模的表达形式, 随即给出了反问题求解的唯一性并且对其不稳定性给出了说明.

6 总结与展望

本文主要研究了两类偏微分方程的随机反源问题. 首先, 我们根据偏微分方程的形式求解出其格林函数, 并且给出其正问题解的随机积分表达形式, 并以此证明解的存在唯一性和适定性. 其次, 通过正问题解的积分表达给出已有数据的统计特性与需要重构的随机源的统计特性两者之间的关系, 最后通过正则化的数值方法得到想要的反演结果.

6.1 主要创新点

针对双调和方程随机反源问题我们将已有的一维结果扩展到二维, 并且在更为一般的噪声假设下给出了正问题解的适定性和连续性的证明, 并且将反问题转化为求解两个第一类 Fredholm 积分方程, 利用吉洪诺夫正则化来求解这类方程以解决问题本身的不适定性, 并在数值上得到了有效且稳定的结果.

针对分数阶扩散方程, 我们考虑了空间域噪声驱动下的随机源问题, 并且通过对时间域的傅里叶变换将原问题等价地转换到了频域上, 将其变为等价求解一个类亥姆霍兹方程. 并且通过证明后者解的正则性和适定性反推得到了原问题解的适定性估计. 而对于如何从仅有的随机源系数的傅里叶模反演求得系数本身的绝对值, 我们利用了相位还原的算法, 从数值上实现了这一点, 并说明了这一数值反演的有效性和稳定性.

6.2 未来工作展望

本文针对两类偏微分方程的随机反源问题给出了其正问题弱解的适定性和求解其相应的反问题的有效算法. 但是该算法框架仍有很大的优化空间, 值得进一步的探索. 另外, 这类求解随机反源问题的方法对于其他偏微分方程的应用也值得更多探索. 因此, 未来的研究方向有以下几个方面:

1. 对于随机反源问题在薄板震动方面的研究上, 本文只研究了静态简支模型下的方程, 即将其物理模型简化唯一个双调和随机方程. 因此在之后的研究中, 我们可以将其延拓到更为一般的情况中去. 例如如何通过动态的薄板震动方程确定随机源和薄板内部的力学性质; 在其他边界条件下如何给出相应的弱解表达并且求解其反问题; 对于弹性地基支撑问题的分析和求解等等.
2. 对于分数阶扩散方程的研究也同样留有许多空白, 从频域的角度上来看, 分数阶扩散方程和分数阶波方程在表达方式上并无区别, 因此通过频域求解这两类

方程的区别和相同点是什么, 以及这类方法是否可以直接运用在对于分数阶波动方程的求解中去, 这都是需要进一步研究和讨论的. 除此之外, 对于高维下无边界的分数阶扩散方程的随机反源求解在本文中仍然只存在于理论层面上, 如何在数值上实现这一点也是我们将来需要考虑的.

3. 本文中我们利用了本应用于压缩感知中的相位还原算法, 这类算法的本质是如何利用傅里叶变换后的信号的模唯一还原求解信号本身的优化方法. 因此, 对于这类方法还能够运用在哪些随机偏微分求解中去还有待我们去探索. 以及对于其他复变换而言, 这类相位还原的算法是否依旧在原理上相通, 这都是我们需要进一步考虑的问题.

参考文献

- [1] Nettleton L L. Determination of density for reduction of gravimeter observations[J]. *Geophysics*, 1939, 4(3): 176-183.
- [2] Ballani L, Stromeyer D. The inverse gravimetric problem: a Hilbert space approach[C]//*Proceedings of the international symposium figure of the earth, the moon, and other planets*. 1982: 359-373.
- [3] Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [4] Kubo S. Inverse problems related to the mechanics and fracture of solids and structures[J]. *JSME international journal. Ser. 1, Solid mechanics, strength of materials*, 1988, 31(2): 157-166.
- [5] Ramm A G. Inverse problems: mathematical and analytical techniques with applications to engineering[M]. Springer Science & Business Media, 2006.
- [6] Chang L, Gong W, Sun G, et al. PDE-constrained optimal control approach for the approximation of an inverse Cauchy problem[J]. *Inverse Problems & Imaging*, 2015, 9(3): 791.
- [7] Fan C M, Li P W, Yeih W. Generalized finite difference method for solving two-dimensional inverse Cauchy problems[J]. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2015, 23(5): 737-759.
- [8] Li P, Liu K, Zhong W. Marching schemes for inverse scattering problems in waveguides with curved boundaries[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, 328: 287-301.
- [9] Bourgeois L. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation[J]. *Inverse problems*, 2005, 21(3): 1087.
- [10] Clason C, Klibanov M V. The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medium[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2008, 30(1): 1-23.
- [11] Liu J C, Wei T. A quasi-reversibility regularization method for an inverse heat conduction problem without initial data[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(23): 10866-10881.

- [12] Bergam A, Chakib A, Nachaoui A, et al. Adaptive mesh techniques based on a posteriori error estimates for an inverse Cauchy problem[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 346: 865-878.
- [13] Bao G, Li P, Lin J, et al. Inverse scattering problems with multi-frequencies[J]. *Inverse Problems*, 2015, 31(9): 093001.
- [14] Alifanov O M. Inverse heat transfer problems[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] Borcea L. Electrical impedance tomography[J]. *Inverse problems*, 2002, 18(6): R99.
- [16] Colton D L, Kress R, Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory[M]. Berlin: Springer, 1998.
- [17] Devaney A J, Wolf E. Radiating and nonradiating classical current distributions and the fields they generate[J]. *Physical Review D*, 1973, 8(4): 1044.
- [18] Devaney A, Sherman G. Nonuniqueness in inverse source and scattering problems[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1982, 30(5): 1034-1037.
- [19] Isakov V. Inverse source problems[M]. American Mathematical Soc., 1990.
- [20] Cannon J R. Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1968, 5(2): 275-286.
- [21] Magnoli N, Viano G A. The source identification problem in electromagnetic theory[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1997, 38(5): 2366-2388.
- [22] Yuste R. Fluorescence microscopy today[J]. *Nature methods*, 2005, 2(12): 902-904.
- [23] Devaney A J. The inverse problem for random sources[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1979, 20(8): 1687-1691.
- [24] Bao G, Chow S N, Li P, et al. An inverse random source problem for the Helmholtz equation[J]. *Mathematics of Computation*, 2014, 83(285): 215-233.
- [25] Li P. An inverse random source scattering problem in inhomogeneous media[J]. *Inverse Problems*, 2011, 27(3): 035004.

- [26] Bao G, Chen C, Li P. Inverse random source scattering problems in several dimensions[J]. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, 2016, 4(1): 1263-1287.
- [27] Li M, Chen C, Li P. Inverse random source scattering for the Helmholtz equation in inhomogeneous media[J]. Inverse Problems, 2017, 34(1): 015003.
- [28] Bao G, Xu X. An inverse random source problem in quantifying the elastic modulus of nanomaterials[J]. Inverse Problems, 2012, 29(1): 015006.
- [29] Feng X, Li P, Wang X. An inverse random source problem for the time fractional diffusion equation driven by a fractional Brownian motion[J]. Inverse Problems, 2020, 36(4): 045008.
- [30] Feng X, Zhao M, Li P, et al. An inverse source problem for the stochastic wave equation[J]. arXiv preprint arXiv:2101.04744, 2021.
- [31] Li J, Helin T, Li P. Inverse random source problems for time-harmonic acoustic and elastic waves[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2020, 45(10): 1335-1380.
- [32] Li P, Wang X. An inverse random source problem for the biharmonic wave equation[J]. arXiv preprint arXiv:2106.12642, 2021.
- [33] Li P, Wang X. An inverse random source problem for maxwell's equations[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2021, 19(1): 25-45.
- [34] Hadamard J. Sur les problmes aux drives partielles et leur signification physique[J]. Princeton university bulletin, 1902: 49-52.
- [35] Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations[M]. Springer, 2010.
- [36] Tihonov A N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method[J]. Soviet Math., 1963, 4: 1035-1038.
- [37] Hansen P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve[J]. SIAM review, 1992, 34(4): 561-580.
- [38] Vogel C R. Computational methods for inverse problems[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [39] Walsh J B. An introduction to stochastic partial differential equations[M]//cole d't de Probabilits de Saint Flour XIV-1984. Springer, Berlin, Heidelberg, 1986: 265-439.

- [40] Klebaner F C. Introduction to stochastic calculus with applications[M]. World Scientific Publishing Company, 2012.
- [41] Deng X , Joseph V R , Mai W , et al. Statistical approach to quantifying the elastic deformation of nanomaterials[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2009, 106(29).
- [42] Mai W, Deng X. The applications of statistical quantification techniques in nanomechanics and nanoelectronics[J]. Nanotechnology, 2010, 21(40): 405704.
- [43] Bao G , Xu X . Identification of the material properties in nonuniform nanostructures[J]. Inverse Problems, 2015, 31(12):125003.
- [44] Mlinar V. Utilization of inverse approach in the design of materials over nanoto macroscale[J]. Annalen der Physik, 2015, 527(3-4): 187-204.
- [45] Katsikadelis J T. The boundary element method for plate analysis[M]. Elsevier, 2014.
- [46] Wang H, Qin Q H. Methods of fundamental solutions in solid mechanics[M]. Elsevier, 2019.
- [47] Adams E E, Gelhar L W. Field study of dispersion in a heterogeneous aquifer: 2. Spatial moments analysis[J]. Water Resources Research, 1992, 28(12): 3293-3307.
- [48] Hatano Y, Hatano N. Dispersive transport of ions in column experiments: An explanation of longtailed profiles[J]. Water resources research, 1998, 34(5): 1027-1033.
- [49] Giona M, Cerbelli S, Roman H E. Fractional diffusion equation and relaxation in complex viscoelastic materials[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1992, 191(1-4): 449-453.
- [50] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach[J]. Physics reports, 2000, 339(1): 1-77.
- [51] Harrach B, Lin Y H. Monotonicity-based inversion of the fractional Schrödinger equation II. General potentials and stability[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2020, 52(1): 402-436.

- [52] Cao X, Liu H. Determining a fractional Helmholtz equation with unknown source and scattering potential[J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2019, 17(7): 1861-1876.
- [53] Cekić M, Lin Y H, Rüländ A. The Calderón problem for the fractional Schrödinger equation with drift[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2020, 59(3): 1-46.
- [54] Wyss W. The fractional diffusion equation[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1986, 27(11): 2782-2785.
- [55] Schneider W R, Wyss W. Fractional diffusion and wave equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1989, 30(1): 134-144.
- [56] Aleroev T S, Kirane M, Malik S A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition[J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013, 2013(270): 1-16.
- [57] Aziz S, Malik S A. Identification of an unknown source term for a time fractional fourth-order parabolic equation[J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016, 293: 1-28.
- [58] Ismailov M I, M. Çiçek M. Inverse source problem for a time-fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(7-8): 4891-4899.
- [59] Zhang Y, Xu X. Inverse source problem for a fractional diffusion equation[J]. *Inverse problems*, 2011, 27(3): 035010.
- [60] Murio D A, Mejía C E. Source terms identification for time fractional diffusion equation[J]. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 2008, 42(1): 25-46.
- [61] Wei T, Sun L, Li Y. Uniqueness for an inverse space-dependent source term in a multi-dimensional time-fractional diffusion equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2016, 61: 108-113.
- [62] Niu P, Helin T, Zhang Z. An inverse random source problem in a stochastic fractional diffusion equation[J]. *Inverse Problems*, 2020, 36(4): 045002.
- [63] Liu C, Wen J, Zhang Z. Reconstruction of the time-dependent source term in a stochastic fractional diffusion equation[J]. *arXiv preprint arXiv:1911.00304*, 2019.

- [64] Patterson A L. Ambiguities in the X-ray analysis of crystal structures[J]. Physical Review, 1944, 65(5-6): 195.
- [65] Jaganathan K, Eldar Y C, Hassibi B. Phase retrieval: An overview of recent developments[J]. Optical Compressive Imaging, 2016: 279-312.
- [66] Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications[M]. Elsevier, 1998.
- [67] Gerchberg R W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. Optik, 1972, 35: 237-246.
- [68] Chen C C, Miao J, Wang C W, et al. Application of optimization technique to noncrystalline x-ray diffraction microscopy: Guided hybrid input-output method[J]. Physical Review B, 2007, 76(6): 064113.
- [69] Fienup J R. Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform[J]. Optics letters, 1978, 3(1): 27-29.
- [70] Jaganathan K, Oymak S, Hassibi B. Sparse phase retrieval: Uniqueness guarantees and recovery algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(9): 2402-2410.
- [71] Johnson I, Jefimovs K, Bunk O, et al. Coherent diffractive imaging using phase front modifications[J]. Physical review letters, 2008, 100(15): 155503.
- [72] Loewen E G, Popov E. Diffraction gratings and applications[M]. CRC Press, 2018.
- [73] Faridian A, Hopp D, Pedrini G, et al. Nanoscale imaging using deep ultraviolet digital holographic microscopy[J]. Optics express, 2010, 18(13): 14159-14164.
- [74] Trebino R. Frequency-Resolved Optical Gating: The Measurement of Ultrashort Laser Pulses: The Measurement of Ultrashort Laser Pulses[M]. Springer Science & Business Media, 2000.
- [75] Candès E J, Eldar Y C, Strohmer T, et al. Phase retrieval via matrix completion[J]. SIAM review, 2015, 57(2): 225-251.
- [76] Candès E J, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization[J]. Foundations of Computational mathematics, 2009, 9(6): 717-772.

- [77] Candès E J, Tao T. The power of convex relaxation: Near-optimal matrix completion[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(5): 2053-2080.
- [78] Mesbahi M, Papavassilopoulos G P. On the rank minimization problem over a positive semidefinite linear matrix inequality[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(2): 239-243.
- [79] Nesterov Y. Introductory lectures on convex optimization: A basic course[M]. Springer Science & Business Media, 2003.
- [80] Becker S R, Candès E J, Grant M C. Templates for convex cone problems with applications to sparse signal recovery[J]. Mathematical programming computation, 2011, 3(3): 165-218.
- [81] Fukushima M, Mine H. A generalized proximal point algorithm for certain non-convex minimization problems[J]. International Journal of Systems Science, 1981, 12(8): 989-1000.
- [82] Tseng P. On accelerated proximal gradient methods for convex-concave optimization[J]. submitted to SIAM Journal on Optimization, 2008, 2(3).
- [83] Auslender A, Teboulle M. Interior gradient and proximal methods for convex and conic optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2006, 16(3): 697-725.
- [84] Han H, Huang Z. A class of artificial boundary conditions for heat equation in unbounded domains[J]. Computers & Mathematics with applications, 2002, 43(6-7): 889-900.
- [85] Atanasova N, Brayanov I. Computation of some unsteady flows over porous semi-infinite flat surface[C]//International Conference on Large-Scale Scientific Computing. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005: 621-628.
- [86] Han H, Sun Z, Wu X. Convergence of a difference scheme for the heat equation in a long strip by artificial boundary conditions[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 2008, 24(1): 272-295.
- [87] Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation[J]. Applied Mathematics Letters, 1996, 9(6): 23-28.

- [88] Metzler R, Klafter J. Boundary value problems for fractional diffusion equations[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000, 278(1-2): 107-125.
- [89] Agrawal O P. A general solution for the fourth-order fractional diffusion-wave equation[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2000, 3(1): 1-12.
- [90] Povstenko Y Z. Signaling problem for time-fractional diffusion-wave equation in a half-plane[J]. *Fract. Calc. Appl. Anal*, 2008, 11(3).
- [91] Povstenko Y. Signaling problem for time-fractional diffusion-wave equation in a half-space in the case of angular symmetry[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 59(4): 593-605.
- [92] Arfken G B, Weber H J. *Mathematical methods for physicists*[J]. 1999.

作者简历

龚宇璇，女，1995 年，汉族，江西南昌人。2013 年进入浙江大学竺可桢学院（混合班），数学与应用数学专业，2017 年本科毕业，获得理学学士学位。2017 年进入浙江大学数学科学学院计算数学专业研究生学习至今。

1. 教育经历

- 2013 年 9 月-2017 年 6 月，浙江大学竺可桢学院，混合班
- 2013 年 9 月-2017 年 6 月，浙江大学数学科学学院，数学与应用数学专业，学士
- 2017 年 6 月-至今，浙江大学数学科学学院，计算数学，博士
- 2019 年 12 月-2020 年 12 月，普渡大学数学院，应用数学，联陪博士

2. 攻读学位期间发表的论文

- Gong Y, Xu X. Inverse random source problem for biharmonic equation in two dimensions[J]. Inverse Problems & Imaging, 2019, 13(3): 635.
- Gong Y, Li P, Wang X, et al. Numerical solution of an inverse random source problem for the time fractional diffusion equation via PhaseLift[J]. Inverse Problems, 2021, 37(4): 045001.